Meilleure note :

Moyenne :

Écart-type :

Première partie

Lutte contre les incendies de forêts

I La lutte au sol

Q1 - Une **particule de fluide** est un élément petit à l'échelle de l'écoulement, et grand à l'échelle microscopique.
L'échelle correspondante est l'**échelle mésoscopique**, de dimensions caractéristiques typiques de l'ordre du **micromètre**.
C'est à cette échelle que s'écrivent les équations locales dans l'approximation des milieux continus.
Un système ouvert est un système qui échange de la matière avec l'extérieur, contrairement à un système fermé.

La relation de Bernoulli concerne les écoulements **parfaits, stationnaires, incompressibles et homogènes dans un champ de pesanteur uniforme** $-g\overrightarrow{e_z}$.
Une des formulations les plus utilisées établit que la somme

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cste}$$

le long d'une ligne de courant.

Q2 - Le volume d'eau après une durée τ de remplissage avec un débit volumique D_v est

$$V = D_v\tau = L^2 h_0, \quad \text{soit } \boxed{h_0 = \frac{D_v \tau}{L^2}}$$

AN : $\underline{h_0 = 65 \text{ cm.}}$

Q3 - a) D'après la loi de la statique des fluides (une particule de fluide au repos est soumise aux forces pressantes et à son poids).

$$\boxed{\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P) + \rho\,\overrightarrow{g}.}$$

b) Par projection sur l'axe des z on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$, soit par intégration entre z et h_0 :

$$\boxed{P(z) + \rho g z = P_0 + \rho g h_0.}$$

c) La résulante des forces pressantes s'exerçant la surface $\mathrm{d}S$ de largeur L et de hauteur $\mathrm{d}z$ est la somme des la force pressante extérieur de norme $P_0\mathrm{d}S$ et de la force pressante intérieure de norme $P(z)\mathrm{d}S$, soit

$$\boxed{\mathrm{d}F = (P(z) - P_0)\mathrm{d}S = \rho g(h_0 - z)L\mathrm{d}z}$$

d) La force s'exerçant sur chaque flanc vertical a la même norme ; pour la calculer, on intègre sur des éléments de surface $L\mathrm{d}z$; en tenant compte de la force pressante exercée par l'air à la pression P_0 sur la face externe, on obtient

$$\boxed{F_p = \int_0^{h_0} (P(z) - P_0)L\mathrm{d}z = \rho g L \int_0^{h_0} (h_0 - z)L\mathrm{d}z = \rho g L \frac{h_0^2}{2}}$$

4. Pour la face de droite du réservoir, la moment des forces pressantes par rapport à O a pour expression :

$$\mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{F_p}) = \left(\int_0^{h_0} (\frac{L}{2}\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) \wedge (P(z) - P_0)L\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}\right) \cdot \overrightarrow{e_y}$$

$$\mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{F_p}) = \int_0^{h_0} z\rho g(h_0 - z)\mathrm{d}z = \rho g L \int_0^{h_0} (h_0 z - z^2)\mathrm{d}z = \rho g L \frac{h_0^3}{6}$$

Soit h_c l'altitude du centre de poussée ; on le détermine par $h_c F_p = \mathscr{M}_{Oy}(\overrightarrow{F_p})$ soit $h_c \rho g L \dfrac{h_0^2}{2} = \rho g L \dfrac{h_0^3}{6}$. On en déduit

$$\boxed{h_c = \frac{1}{3}h_0}$$

Q5 - a) Dans le référentiel du véhicule, non galiléen, en translation rectiligne uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen, une particule de fluide est soumise à

— son poids, $\rho\overrightarrow{g}$ en volumique,
— les forces pressantes de résultante volumique $-\overrightarrow{\text{grad}}\,(p)$,
— la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ent,V}} = -\rho\overrightarrow{a}$.

b) Dans le référentiel du véhicule, le fluide est à l'équilibre. On a :

$$\overrightarrow{0} = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P - \rho\overrightarrow{a}.$$

Par projection on obtient : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\rho a$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$.

Soit $P(x,z) = -\rho a x + f(z)$, avec $f'(z) = -\rho g$.
On en déduit

$$\boxed{P(x,z) = -\rho a x - \rho g z + \text{cste}}$$

c) Les surfaces isobares sont donc les plans d'équation

$$\boxed{gz + ax = \text{Constante}}$$

d) Le point milieu étant à l'altitude h_0, on a

$$P(-L/2, h_0) = P_0 = -\rho(-a\frac{L}{2} + gh_0) + \text{cste}.$$

Soit $\text{cste} = P_0 + \rho(-a\dfrac{L}{2} + gh_0)$

À l'avant du réservoir, la hauteur d'eau est telle que

$$P_0 = -\rho g h + P_0 + \rho(-a\frac{L}{2} + gh_0),$$

soit $h = h_0 - \dfrac{aL}{2g}$.

Entre l'avant et l'arrière du réservoir, la dénivellation est

$$\boxed{\Delta z = \frac{a}{g}L}$$

AN : $\Delta z = 9,7$ cm.

e) Sur la face avant s'exerce une force de norme

$$F_{av} = \rho g L\frac{(h_0 - \frac{\Delta z}{2})^2}{2}$$

et sur la face arrière s'exerce une force de norme

$$F_{ar} = \rho g L\frac{(h_0 + \frac{\Delta z}{2})^2}{2}$$

Ces deux forces ne se compensent pas, et la résultante horizontale de ces forces est

$$F_{hor} = \frac{1}{2}\rho g L\left[(h_0 + \frac{\Delta z}{2})^2 - (h_0 - \frac{\Delta z}{2})^2\right] = \rho g L h_0 \Delta z = \rho a L^2 h_0$$

La force verticale exercée par le fond du réservoir reste inchangée ; elle compense le poids et la force pressante exercée sur la surface libre :

$$F_{ver} = (p_0 + \rho g h_0)L^2 \simeq \rho g h_0 L^2$$

où l'on a négligé la contribution de la pression atmosphérique.

<u>Autre méthode :</u> La résultante des forces exercées par l'eau sur le réservoir est opposée à la résultante des forces exercées par le réservoir sur l'eau, qui est à l'équilibre dans le référentiel mobile donc

$$\overrightarrow{0} = -\rho g h_0 L^2\overrightarrow{e_z} - \rho g h_0 L^2\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{F_{reservoir}}$$

en négligeant les forces pressantes.

Il vient

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\rho h_0 L^2(g\overrightarrow{e_z} + a\overrightarrow{e_x})}$$

Q6 - En première approximation, le volume d'air est resté constant. La pression étant p_0 à la température $T_0 = 288$ K, elle passe à p_i à la température $T = 313$ K, avec

$$\boxed{p_i = p_0\frac{T}{T_0}}$$

AN : <u>$p_i = 1,1$ bar.</u>

Lorsque la vidange s'effectue, le volume offert à l'air augmente, et la pression diminue. La vidange cesse lorsque la pression de l'eau au fond du réservoir n'est plus supérieure à p_0. La pression p_f dans l'air est alors telle que

$$\begin{cases} p_0 = p_f + \rho g h \\ p_i(H - h_0) = p_f(H - h) \end{cases}$$

En éliminant p_f entre ces deux équations, on obtient

$$p_i(H - h_0) = (p_0 - \rho g h)(H - h)$$

ce qui est bien une équation du second degré en h. On trouve deux solutions, dont une seule est comprise entre 0 et H. On retient donc cette solution :
AN : $\underline{h = 64,2 \text{ cm}}$

Le volume d'eau vidangé est $\boxed{V_{vid} = L^2(h_0 - h)}$, AN : $\underline{V_{vid} = 7,2 \text{ L.}}$

La pression p_f est alors $\boxed{p_f = p_0 - \rho g h}$, AN : $\underline{p_f = 0,95 \text{ bar}}$.

Le réservoir risque de se déformer sous l'effet de la pression de l'air extérieur. Ou il sera difficile de retirer le bouchon.

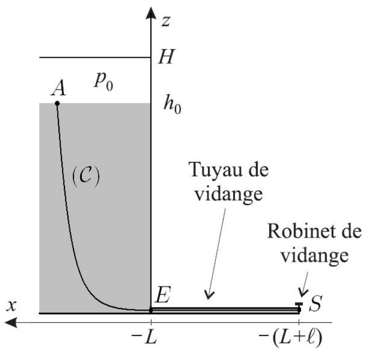
Q7 - Par une fantaisie étrange, l'axe est orienté selon les x décroissants ; l'écoulement s'effectue selon les x décroissants, donc le champ des vitesses est de la forme

$$\overrightarrow{v}(x,t) = -v(x,t)\widehat{e_x} \quad \text{avec} \quad v(x,t) \geq 0$$

L'écoulement étant incompressible, la divergence de $\overrightarrow{v}$ est nulle ; $v(x,t)$ est donc indépendant de x. Il reste bien

$$\boxed{\overrightarrow{v}(x,t) = -v(t)\widehat{e_x} \quad \text{avec} \quad v(t) \geq 0}$$

Q 8 On suppose qu'il existe une ligne de courant joignant un point A de la surface libre au point E à l'entrée du tube.



L'équation d'Euler peut s'écrire

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 - \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(p + \rho g z)$$

soit

$$\rho\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right) = \rho\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}$$

En intégrant sur la ligne de courant de A à E, on obtient, en considérant l'écoulement comme pratiquement indépendant du temps dans le réservoir :

$$\left[p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right]_A^E = \rho\int_A^E \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{dl} = 0$$

soit, en considérant la vitesse d'écoulement négligeable en A :

$$p_E + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \rho g h_0$$

Intégrons maintenant de E à S :

$$\rho\ell\frac{dv}{dt} + \left[p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right]_E^S = 0$$

La pression en S est la pression atmosphérique p_0, donc

$$\rho\ell\frac{dv}{dt} + p_0 - p_E = 0$$

soit, en explicitant p_E :

$$\rho\ell\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h_0$$

ce qui est bien de la forme

$$\boxed{\ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = k^2 \text{ avec } k^2 = g h_0}$$

Q9 - L'équation précédente admet une solution constante

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2 g h_0}.}$$

On peut alors réécrire l'équation

$$\ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2}$$

En posant $w = \dfrac{1}{v+v_0}$, on a

$$v = \frac{1}{w} - v_0; v^2 = \frac{1}{w^2} - \frac{2v_0}{w} + v_0^2; \frac{dv}{dt} = -\frac{\dot{w}}{w^2}$$

L'équation différentielle en w s'écrit

$$-\ell\frac{\dot{w}}{w^2} + \frac{1}{2w^2} - \frac{v_0}{w} = 0$$

ce qui devient une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\boxed{\dot{w} + \frac{v_0}{\ell}w = \frac{1}{2\ell}}$$

et, en introduisant la constante de temps $\tau = \dfrac{\ell}{\sqrt{2gh_0}} = \dfrac{\ell}{v_0}$:

$$\dot{w} + \frac{1}{\tau}w = \frac{1}{2v_0\tau}$$

La solution générale est

$$w = \frac{1}{2v_0} + A\exp(-t/\tau)$$

Lorsque $t \to 0$, $v \to 0$ donc $w \to 1/v_0$. On en déduit que

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{2v_0} + A \text{ soit } A = \frac{1}{2v_0}$$

On a donc, compte tenu des conditions initiales

$$\boxed{w = \frac{1}{2v_0}(1 + e^{-t/\tau})}$$

soit

$$v(t) = \frac{2v_0}{1+e^{-t/\tau}} - v_0 = v_0\frac{2-1-e^{-t/\tau}}{1+e^{-t/\tau}} = v_0\frac{1-e^{-t/\tau}}{1+e^{-t/\tau}}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\boxed{v(t) = v_0\tanh\left(\frac{t}{2\tau}\right)}$$

La valeur limite de la vitesse est

$$v_1 = v_0 = \sqrt{2gh_0} = 3,57 \text{ m.s}^{-1}$$

Q10 - La constante de temps est

$$\tau = \frac{\ell}{v_0} = 0,22 \text{ s}$$

La différence relative entre v et sa valeur limite $v_l = v_0$ est inférieure à 1% pour $t > t_0$, avec

$$\tanh\left(\frac{t_0}{2\tau}\right) = 0,99 \text{ soit } t_0 = 2\tau\text{Argtanh}(0,99) = 1,2 \text{ s}$$

Ou $\boxed{t_0 = \tau\ln(199)}$, AN : $\underline{t_= 1,2 \text{ s}}$.

Q11 - Considérons la vitesse limite toujours atteinte ; à tout instant, on a donc une vitesse d'éjection

$$v = \sqrt{2gh}$$

Le bilan volumique conduit à l'équation différentielle d'évolution de la hauteur h :

$$-L^2\frac{dh}{dt} = \frac{\pi\delta^2}{4}\sqrt{2gh}$$

soit

$$h^{-1/2}\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi\delta^2}{4L^2}\sqrt{2g}$$

que l'on intègre entre l'instant initial 0 et l'instant final t_v :

$$2h_0^{1/2} - 0 = -\frac{\pi\delta^2}{4L^2}\sqrt{2g}t_v$$

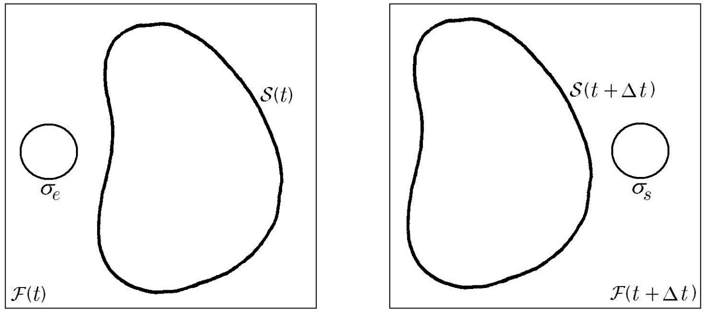
On en déduit la durée de la vidange

$$\boxed{t_v = \frac{8L^2h_0^{1/2}}{\pi\delta^2\sqrt{2g}}}$$

AN : $\underline{t_v = 1046 \text{ s} \simeq 18 \text{ min}}$

Q12 - Soit le système *fermé* $\mathcal{F}$ constitué

- à l'instant t du fluide en transit (système ouvert $\mathcal{S}(t)$) dans la lance et du fluide qui y entre (système σ_e) pendant $[t, t+\Delta t]$;
- à l'instant t du fluide en transit (système ouvert $\mathcal{S}(t+\Delta t)$) dans la pompe et du fluide qui en sort (système σ_e) pendant $[t, t+\Delta t]$.



En régime permanent, l'énergie mécanique de $\mathcal{S}$ est indépendante du temps

$$E_{\mathcal{S}}(t) = E_{\mathcal{S}}(t+\Delta t) = E_0$$

et les masses de σ_e et σ_s sont égales à

$$\Delta m = \rho D_v \Delta t$$

L'énergie mécanique de $\mathcal{F}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}}(t) &= E_{\mathcal{S}}(t) + E_{\sigma_e} \\ &= E_0 + \rho D_v \Delta t \left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e\right) \\ E_{\mathcal{F}}(t+\Delta t) &= E_{\mathcal{S}}(t+\Delta t) + E_{\sigma_s} \\ &= E_0 + \rho D_v \Delta t \left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{dE_{\mathcal{F}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E_{\mathcal{F}}(t+\Delta t) - E_{\mathcal{F}}(t)}{\Delta t} = \rho D_v \left(\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + g(z_s - z_e)\right)$$

Le théorème de l'énergie exprime que $\dfrac{dE_{\mathcal{F}}}{dt}$ est égal à la somme des puissances des efforts non conservatifs, soit

- la puissance $\mathcal{P}$ de la motopompe ;
- la puissance $\mathcal{P}_1 = p_e \dfrac{\pi d_1^2}{4} v_e = p_e D_v$ des forces pressantes en amont ;
- la puissance $\mathcal{P}_2 = -p_s \dfrac{\pi d_2^2}{4} v_s = -p_s D_v$ des forces pressantes en aval.

On obtient ainsi

$$\rho D_v \left(\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + g(z_s - z_e)\right) = \mathcal{P} + D_v(p_e - p_s)$$

soit

$$\rho D_v \left(\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{p_s - p_e}{\rho}\right) = \mathcal{P}$$

Q13 - On a $z_s - z_h = \Delta h = 20$ m.
a) Les vitesses en entrée et en sortie peuvent s'exprimer en fonction du débit volumique

$$\begin{cases} v_e = \dfrac{4D_v}{\pi d_1^2} \\ v_s = \dfrac{4D_v}{\pi d_2^2} \end{cases}$$

b) On en déduit

$$\rho D_v \left(\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4}\right) D_v^2 + g\Delta h + \frac{p_s - p_e}{\rho}\right) = \mathcal{P}$$

Le débit maximal correspond $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{max}$ et $p_s - p_e = \rho g h_0$ négligeable devant $\rho g \Delta h$, soit

$$\boxed{\rho D_{vmax} \left(\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4}\right) D_{vmax}^2 + g\Delta h\right) = \mathcal{P}_{max}}$$

On obtient une équation de degré 3 que l'on résout numériquement :

$$D_{vmax} = 3,0.10^{-3}\ \text{m}^3.\text{s}^{-1} = 3,0\ \text{L.s}^{-1}$$

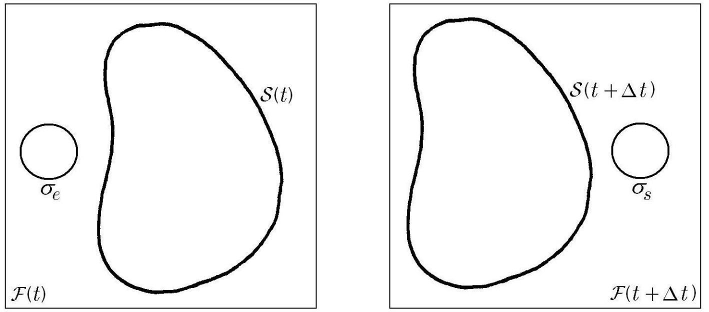
c) La vitesse maximale de l'eau en sortie de lance est

$$v_{max} = \frac{4D_{vmax}}{\pi d_2^2} = 20\ \text{m.s}^{-1}$$

Q 14 - Soit le système *fermé* $\mathcal{F}$ constitué

- à l'instant t du fluide en transit (système ouvert $\mathcal{S}(t)$) dans l'embout conique de la lance et du fluide qui y entre (système σ_e) pendant $[t, t+\Delta t]$;

— à l'instant t du fluide en transit (système ouvert $\mathcal{S}(t+\Delta t)$) dans la pompe et du fluide qui en sort (système σ_e) pendant $[t, t+\Delta t]$.



En régime permanent, la quantité de mouvement de $\mathcal{S}$ est indépendante du temps

$$\vec{p}_{\mathcal{S}}(t) = \vec{p}_{\mathcal{S}}(t+\Delta t) = \vec{p}_0$$

et les masses de σ_e et σ_s sont égales à

$$\Delta m = \rho D_v \Delta t$$

La quantité de mouvement de $\mathcal{F}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\mathcal{F}}(t) &= \vec{p}_{\mathcal{S}}(t) + \vec{p}_{\sigma_e} \\
&= \vec{p}_0 + \rho D_v \Delta t \vec{v_e} \\
\vec{p}_{\mathcal{F}}(t+\Delta t) &= \vec{p}_{\mathcal{S}}(t+\Delta t) + \vec{p}_{\sigma_s} \\
&= \vec{p}_0 + \rho D_v \Delta t \vec{v_s}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{d\vec{p}_{\mathcal{F}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}_{\mathcal{F}}(t+\Delta t) - \vec{p}_{\mathcal{F}}(t)}{\Delta t} = \rho D_v \left(\vec{v_s} - \vec{v_e}\right)$$

Le théorème de la résultante cinétique exprime que $\dfrac{d\vec{p}_{\mathcal{F}}}{dt}$ est égal à la somme des forces qui s'exercent sur $\mathcal{F}$; si on ne s'intéresse qu'à la partie horizontale de cette force et si on néglige les forces pressantes amont et aval, on obtient

$$-\vec{F_e} = \rho D_v \left(\vec{v_s} - \vec{v_e}\right)$$

soit

$$\vec{F_e} = -\rho D_v \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right) \vec{v_s}$$

Pour le débit maximal, le module de cette force est

$$F_e = 49 \text{ N}$$

15. Le mouvement s'effectue dans le plan $O'x'z'$; en appliquant le théorème de la résultante cinétique à une particule de fluide, on obtient les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{z}' = -g \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x}' = v_s \cos\alpha \\ \dot{z}' = -gt + v_s \sin\alpha \end{cases}$$

et finalement

$$\begin{cases} x' = v_s t \cos\alpha \\ z' = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_s t \sin\alpha + z'_0 \end{cases}$$

En éliminant le temps entre ces deux équations, on obtient

$$z' = -\frac{g x'^2}{2 v_s^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha x' + z'_0$$

soit, en posant $\tau = \tan\alpha$:

$$z' = -\frac{g}{2v_s^2}(1+\tau^2)x'^2 + \tau x' + z'_0$$

Q16 - Soit p la portée, c'est-à-dire la valeur de x' pour laquelle z' s'annule. Elle est déterminée par l'équation du second degré

$$\frac{g}{2v_s^2}(1+\tau^2)p^2 - \tau p - z'_0 = 0$$

En différentiant, on obtient

$$\frac{g}{v_s^2}\left[p^2 \tau d\tau + (1+\tau^2) p dp\right] - d\tau p - \tau dp = 0$$

Lorsque la portée est maximale, on a $dp = 0$ donc

$$\frac{g}{v_s^2} p^2 \tau d\tau - p d\tau = 0$$

soit

$$\tau p = \frac{v_s^2}{g}$$

On élimine τ dans l'équation du second degré qui se réduit alors à

$$\frac{g}{2v_s^2}\left(p^2+\left(\frac{v_s^2}{g}\right)^2\right)-\frac{v_s^2}{g}-z_0'=0$$

d'où l'on déduit

$$\frac{g}{2v_s^2}p^2=z_0'+\frac{v_s^2}{2g}$$

et finalement

$$p=\sqrt{\frac{2v_s^2}{g}\left(z_0'+\frac{v_s^2}{2g}\right)}$$

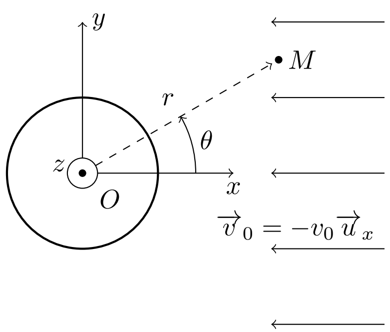
Numériquement, on obtient $p=57$ m pour $\tau=0,71$ soit $\alpha=35^o$.

le lieu de largage et une altitude haute qui garantit la sécurité de l'appareil et de ses occupants.

Deuxième partie

Le vol d'une balle de golf

Extrait de Physique 1 Centrale PC 2012



Q1. L'écoulement étant stationnaire, la vitesse est **indépendante du temps**.

Le cylindre étant infini, il y a invariance par translation selon $\vec{u_z}$: la vitesse est donc **indépendante de** z.

La vitesse dépend donc de r et de θ.

Q2. Le champ des vitesses doit vérifier les conditions aux limites :

— $\lim_{r\to\infty}\vec{v}(r,\theta)=-v_0\vec{u_x}$

— l'écoulement étant parfait, la vitesse est tangente à la surface du cylindre : $\lim_{r\to R}\vec{v}(r,\theta)\cdot\vec{u_r}=0$ ou $v_r(R,\theta)=0$.

Q3. L'écoulement étant **irrotationnel** ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}=\vec{0}$), il existe une fonction φ telle que $\vec{v}=\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$.

Q4. Les composantes du champ de vitesse sont

$$\begin{cases} v_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\left(-v_0+\dfrac{p}{2\pi r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\left(v_0+\dfrac{p}{2\pi r^2}\right)\sin\theta+\dfrac{R^2}{r}\Omega \end{cases}$$

Q5. pour $r\to\infty$

$$\lim_{r\to\infty}\vec{v}(r,\theta)=-v_0\cos\theta\,\vec{u_r}+v_0\sin\theta\,\vec{u_\theta}=-v_0\,\vec{u_x}$$

La condition aux limites à l'infini est donc satisfaite.

pour $r=R$

$$\vec{v}(R,\theta)=\left(-v_0+\frac{p}{2\pi R^2}\right)\cos\theta\,\vec{u_r}+\left[\left(v_0+\frac{p}{2\pi R^2}\right)\sin\theta+\frac{R^2}{r}\Omega\right]\vec{u_\theta}$$

La condition aux limites au contact du cylindre est donc satisfaite si et seulement si

$$-v_0+\frac{p}{2\pi R^2}=0$$

ce qui détermine

$$\boxed{p=2\pi R^2v_0}$$

Le champ des vitesses est alors

$$\vec{v}=v_0\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\vec{u_r}+\left[v_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta+\frac{R^2\Omega}{r}\right]\vec{u_\theta}$$

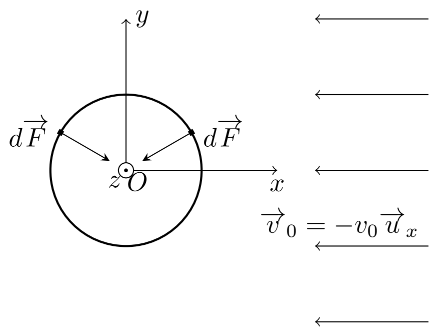
Q6. Le théorème de Bernoulli montre que, dans un écoulement parfait, irrotationnel, permanent et incompressible, la somme

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2$$

est uniforme dans tout le fluide. Compte tenu de la valeur P_0 de la pression à l'infini, on obtient, entre la surface du cylindre et l'infini :

$$\begin{aligned} P(R,\theta) &= P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 - \frac{1}{2}\rho v^2(R,\theta) \\ P(R,\theta) &= P_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v_\theta^2) \\ &= P_0 + \frac{1}{2}\rho\left[v_0^2 - (2v_0\sin\theta + R\Omega)^2\right] \\ &= P_0 + \frac{1}{2}\rho\left(v_0^2(1-4\sin^2\theta) - R^2\Omega^2 - 4v_0R\Omega\sin\theta\right) \end{aligned}$$

Q7. Soient deux points $M(R,\theta)$ et $M'(R,\pi-\theta)$ symétriques l'un de l'autre par rapport à (Oy). On a $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ donc $P(R,\theta) = P(R,\pi-\theta)$. Les forces de pression élémentaires s'exerçant sur des éléments de surface symétriques par rapport à l'axe Oy sont elles-mêmes symétriques par rapport à cet axe ; leur somme a donc une projection nulle selon $\overrightarrow{u}_x$.



En sommant par éléments symétriques, on en déduit que la résultante $\overrightarrow{F}_p$ des forces de pression a une composante nulle selon $\overrightarrow{u}_x$.

Q8. La contribution d'un élément de surface $dS = hRd\theta$ est

$$d\overrightarrow{F_p}\cdot\overrightarrow{u_y} = -P(R,\theta)hRd\theta\sin\theta$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_p}\cdot\overrightarrow{u_y} &= -\int_0^{2\pi} P(R,\theta)hR\sin\theta\, d\theta \\ &= -Rh\int_0^{2\pi}\left[P_0 + \frac{1}{2}\rho\left(v_0^2(1-4\sin^2\theta) - R^2\Omega^2 - 4v_0R\Omega\sin\theta\right)\right]\sin\theta\, d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\rho hR\int_0^{2\pi} -4v_0R\Omega\sin^2\theta d\theta \\ &= 2\pi\rho hR^2v_0\Omega \end{aligned}$$

On a $$\boxed{\overrightarrow{F_p} = 2\pi\rho hR^2v_0\Omega\,\overrightarrow{u}_y}$$

Or $\overrightarrow{v_0}\wedge\overrightarrow{\Omega} = -v_0\overrightarrow{u}_x\wedge\Omega\overrightarrow{u}_z = v_0\Omega\overrightarrow{u}_y$. On peut écrire la force totale sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{F_p} = \alpha\overrightarrow{v_0}\wedge\overrightarrow{\Omega} \text{ avec } \alpha = 2\pi\rho hR^2}$$

Q9. (a) Pour $\Omega > 0$, la force est dirigée selon $+\overrightarrow{u_y}$; la portance est dirigée vers le haut, elle s'oppose au poids, et la portée est allongée.

Pour $\Omega < 0$, elle est dirigée selon $-\overrightarrow{u_y}$; la portance est dirigée vers le bas (dans le même sens que le poids), et la portée est diminuée.

(b) La norme de cette force au départ d'un coup de "driver" est, avec les valeurs données dans l'énoncé :

$$F_p = 0,4 \text{ N}$$

Elle est presque aussi importante que le poids $P = 0,45$ N.

(c) Si le vecteur-rotation n'est pas tout à fait porté par $\overrightarrow{u}_z$, la force $\overrightarrow{F_p}$ possède une composante horizontale ; la trajectoire n'est pas plane et la direction sera incorrecte.

(d) Il faudrait tenir compte de la viscosité de l'air. Il en résulte une force de traînée ralentissant le mouvement du centre de masse de la balle et un couple de freinage ralentissant la rotation de la balle, et diminuant ainsi la portance.

Troisième partie

Contrariétés expérimentales

II Un voltmètre récalcitrant !

Une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 240$ V est branchée aux bornes de deux résistances en série, toutes deux égales à $R = 10$ MΩ (Figure 1).

Q1 - D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{U_{PM} = \frac{R}{R+R}U = \frac{U}{2} = U_{MN}}.$$

Les valeurs efficaces des tensions U_{MN} et U_{PM} sont égales à $\underline{120 \text{ V}}$.

Q2 - Posons $R' = \dfrac{Rr}{R+r}$ la résistance équivalente à l'association parallèle du voltmètre avec le conducteur ohmique de résistance R. Lorsqu'on branche le voltmètre entre M et N, ou entre P et M, on mesure une tension efficace

$$\boxed{U'_{PM} = U\frac{R'}{R+R'} = U\frac{Rr}{R(R+r)+Rr} = U\frac{r}{R+2r}}$$

AN : $\underline{U'_{PM} = U'_{MN} = 80 \text{ V}}$

Lorsqu'on le branche entre P et N, on mesure une tension efficace $\underline{U_{PN} = U = 240 \text{ V}}$.

Q3 - Dans les deux premiers cas, on ne mesure pas la valeur attendue : l'appareil de mesure perturbe le circuit électrique mesuré.

III Un oscilloscope perturbant !

Q4 - Une source de tension $E = 12$ V alimente trois résistances égales R disposées en série (Figure 2).
La tension entre les bornes A et B dessinées sur le schéma est :

$$\boxed{U_{AB} = \frac{R}{R+R+R}E = \frac{E}{3}}$$ (Formule du pont diviseur de tension).

AN : $\underline{U_{AB} = 4 \text{ V}}$.

Q5 - Pour mesurer cette tension on utilise l'oscilloscope dessiné sur la même Figure 2, borne A' reliée à la borne A et borne B' reliée à la borne B. Cet oscilloscope a une impédance interne très supérieure à la résistance R et pourtant la tension qu'il mesure n'est pas celle qui a été calculée. Il mesure une tension

$$\boxed{U'_{AB} = \frac{E}{2}}$$

soit $\underline{U'_{AB} = 6 \text{ V}}$. En effet, la masse en B' court-circuite la résistance R de la branche du bas.

IV Une diode en danger !

Q6 - En régime stationnaire, l'**intensité du courant électrique est nulle** (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).

Q7 - Cependant, le condensateur étant initialement non chargé, la diode est détruite lors du branchement. En effet, à $t = 0^+$, la tension aux bornes du consensateur est nulle (il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et il est déchargé en 0^-). Soit I_0, l'intensité du courant parcourant le circuit à $t = 0^+$, d'après le loi des mailles $E = V_D + 0$, soit

$$\boxed{I_0 = \frac{E}{R_D}}.$$

AN : $\underline{I_0 = 20 \text{ A}}$, ce qui est très supérieur à l'intensité admissible par la diode.

Q8 - La résistance minimale qui doit être montée en série avec la diode est donnée par

$$\boxed{I_{max} = \frac{E}{R_D + R_{min}} \text{ soit } R_{min} = \frac{E}{I_{max}} - R_D}$$

AN : $\underline{R_{max} = 11,4\ \Omega}$

V Un oscilloscope en danger !

1. On a $\boxed{u = L\dfrac{di}{dt}}$ (relation caractéristique d'une bobine). Une brutale variation d'intensité s'accompagne de l'apparition d'une forte surtension.
2. — En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil. L'intensité du courant circulant avant l'ouverture du contact, est

$$\boxed{I(0^-) = \frac{E}{R}}$$ (Loi de Pouillet)

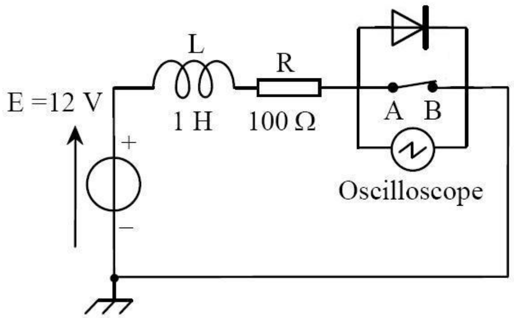
AN : $\underline{I(0^-) = 120 \text{ mA}}$.

— L'intensité est continue en $t = 0$; on a donc $i(0^+) = I(0^-)$; cette intensité traverse la résistance d'entrée de l'oscillo, ce qui détermine la valeur de la tension atteinte

$$\boxed{V_p = R_E\ i(0^-)}.$$

AN : $\underline{V_P = 1,2.10^5 \text{ V}}$. C'est bien supérieur à la tension admissible ; l'appareil est donc en danger.

3. On peut se protéger de cet effet de surtension à l'aide d'une diode en la branchant parallèlement à l'interrupteur.



Quand l'interrupteur est fermé, la diode est court-circuitée ; l'intensité qui la traverse est nulle. Quand l'interrupteur est ouvert, l'intensité passe essentiellement dans la diode, car $R_D \ll R_E$; on a approximativement

$$V_p = R_D\ i(0^-) = 7,2.10^{-2} \text{ V}$$

en prenant un modèle sans seuil de résistance $R_D = 0,6\ \Omega$; l'oscillo ne risque plus rien. Un modèle plus réaliste de diode avec seuil donnerait une tension voisine de la tension de seuil de la diode, soit typiquement de 0,6 V. Cela reste sans danger pour l'oscillo.