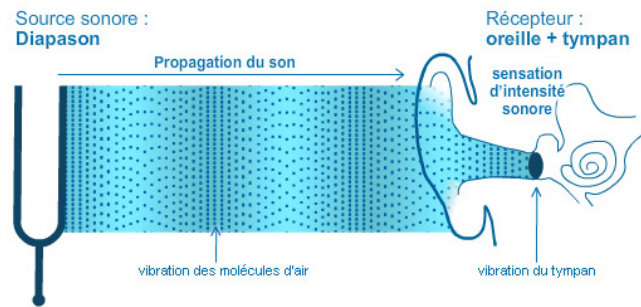


Ondes acoustiques dans les fluides



I Équation d'onde

I.1 Équations brutes

Équation d'Euler pour un fluide parfait :

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

Fluide compressible caractérisé par son coefficient de compressibilité isentrope :

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

I.2 Approximation acoustique

L'onde sonore est une perturbation par rapport à l'état d'équilibre (P_0, μ_0) .

$$P(M, t) = P_0 + p_1(M, t), \quad \mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t), \quad \vec{v}(M, t) = \vec{v}_1(M, t)$$

avec $\frac{|p_1|}{P_0} \ll 1$, $\frac{|\mu_1|}{\mu_0} \ll 1$ et $\frac{\|\vec{v}_1\|}{c} \ll 1$, c est la célérité de l'onde sonore dans le fluide considéré.

Grandeur	Unité	Fluide au repos	En présence d'une onde sonore
Champ des vitesses	m.s ⁻¹	$\vec{v}(M, t) = \vec{0}$	$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_1(M, t)$
Champ de pression	Pa	$P(M, t) = P_0$	$P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$
Masse volumique	kg.m ⁻³	$\mu(M, t) = \mu_0$	$\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$
Déplacement des particules	m	$\xi(M, t) = 0$	$\xi(M, t) = \xi_1(M, t)$

I.3 Linéarisation

Équation d'Euler linéarisée : $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}}(p_1)$

Conservation de la masse linéarisée : $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}_1)$

Évolution isentropique linéarisée : $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1$

μ_1 et p_1 sont proportionnelles, on peut éliminer μ_1 et obtenir deux équations couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}}(p_1) \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \text{div}(\vec{v}_1) \end{cases}$$

I.4 Équation de propagation pour la surpression acoustique

a Onde unidimensionnelle

On a $p_1(M, t) = p_1(x, t)$ et $\vec{v}_1(M, t) = v_1(M, t)\vec{e}_x$. Les équations couplées ont alors comme forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} \vec{e}_x = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} \vec{e}_x \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{cases}$$

Soit

$$\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \right) \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

b Généralisation

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

Équation de d'Alembert à 3D

I.5 Équation de propagation pour la vitesse

$$\Delta \vec{v}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

I.6 Ordres de grandeur

État	Gaz à 20°C			Liquide	
Matière	Air	Dioxygène	Dihydrogène	Eau	Mercure
c en m.s^{-1}	343	317	1270	1480	1450

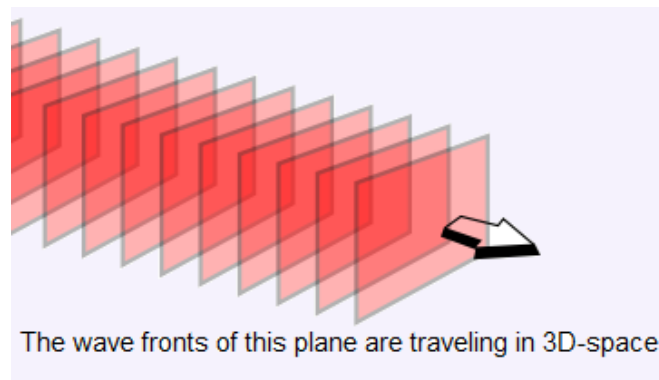
II Solutions en ondes planes

II.1 Ondes planes

a Définition

Une **surface d'onde** est une surface sur laquelle l'onde est uniforme (même état vibratoire). C'est donc l'ensemble des points M se trouvant dans le même état vibratoire à un instant donné : $s(M, t) = K(t)$ (constante sur la surface, mais variable dans le temps).

Une onde est plane si ses surfaces d'onde sont des plans (on parle alors de "plans d'onde").



$$s(M, t) = f\left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{c}\right)$$

$\vec{u}$ vecteur unitaire donnant la direction et le sens de propagation. f fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^2$.

b OPPS

$$s(M, t) = S_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi\right)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}.$$

c Notations complexes

$$\underline{s}(M, t) = S_0 \exp\left(j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi)\right) = \underline{S_0} \exp\left(j\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}\right)\right)$$

avec $\underline{S_0} = S_0 \exp(j\varphi)$.

$p_1(M, t) = p_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_p)$	$\frac{\partial p_1}{\partial t}$	$\frac{\partial p_1}{\partial x}$	$\vec{\text{grad}} p_1$	Δp_1
$\underline{p}_1(M, t) = \underline{p}_{10} \exp \left(j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} \right) \right)$	$i\omega \underline{p}_1$	$-jk_x \underline{p}_1$	$-j \vec{k} \underline{p}_1$	$-k^2 \underline{p}_1$
$\vec{v}_1(M, t) = \vec{v}_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_v)$	$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$	$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x}$	$\vec{\text{rot}}(\vec{v}_1)$	$\text{div}(\vec{v}_1)$
$\underline{\vec{v}}_1(M, t) = \underline{\vec{v}}_{10} \exp \left(j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} \right) \right)$	$i\omega \underline{\vec{v}}_1$	$-jk_x \underline{\vec{v}}_1$	$-j \vec{k} \wedge \underline{\vec{v}}_1$	$-j \vec{k} \cdot \underline{\vec{v}}_1$

II.2 Structure de l'onde plane progressive sinusoïdale sonore

a Équation de dispersion

D'après l'équation d'onde, on a

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$.

En notation complexe, pour une OPPM, cette équation devient : $-k^2 \underline{p}_1 = -\frac{\omega^2}{c} \underline{p}_1$ d'où l'équation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

b Structure

En notation complexe, pour une OPPM :

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \underline{\vec{v}}_1 = \omega \chi_s \underline{p}_1 \\ \underline{p}_1 \vec{k} = \mu_0 \omega \underline{\vec{v}}_1 \end{cases}$$

Il vient : $\underline{\vec{v}}_1 = \frac{\underline{p}_1}{\mu_0 c} \vec{u} = \frac{p_{10}}{\mu_0 c} \exp j \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_p \right) \vec{u}$.

Avec les grandeurs réelles : $\vec{v}_1(M, t) = \frac{p_{10}}{\mu_0 c} \cos \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi_p \right) \vec{u}$.

Une onde sonore est une **onde longitudinale** puisque la vitesse est dirigée selon la direction de propagation. Les ondes de surpression et de vitesse sont en phase.

c Impédance

On appelle impédance acoustique d'un milieu le rapport $\frac{p_1}{v_1}$.

$$Z_a = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

III Aspect énergétique

III.1 Vecteur densité de courant d'énergie

Sur une surface élémentaire $dS \vec{n}$ s'exerce une force acoustique

$$d\vec{F} = p_1 dS \vec{n}$$

de puissance

$$d\mathcal{P} = d\vec{F} \cdot \vec{v}_1 = p_1 dS \vec{n} \cdot \vec{v}_1$$

Cette puissance est le flux de $\vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1$ à travers cette surface élémentaire, soit

$$d\mathcal{P} = \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS$$

III.2 Densité volumique d'énergie

Soit e_{ac} la densité volumique d'énergie acoustique ; en l'absence de phénomène dissipatif, l'énergie acoustique se conserve ; si $\vec{\Pi}$ désigne le vecteur densité de courant associé à l'énergie acoustique, la conservation de l'énergie acoustique s'écrit

$$\frac{\partial e_{ac}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$

On peut s'attendre à une énergie volumique comportant un terme d'énergie cinétique, et un terme e' d'énergie potentielle élastique, proportionnelle à p_1^2 , soit une énergie volumique de la forme :

$$e_{ac} = \frac{1}{2} \mu_0 v^2 + K p_1^2$$

où K est une constante à déterminer.

Calculons la divergence de $\vec{\Pi}$; on a

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Pi} &= p_1 \text{div } \vec{v}_1 + \overrightarrow{\text{grad}} p_1 \cdot \vec{v}_1 \\ &= -\chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1 \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \right] \end{aligned}$$

On peut ainsi identifier e_{ac} , qui est bien de la forme escomptée, avec $K = \frac{1}{2} \chi_s$. On a finalement

$$\begin{cases} e_{ac} = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 \\ \vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1 \end{cases}$$

III.3 Bilan

III.4 Intensité acoustique

a Définition

On définit l'intensité acoustique comme la norme de la moyenne temporelle du vecteur densité de courant d'énergie acoustique :

$$I = \left\| \langle \vec{\Pi} \rangle \right\|$$

On retiendra les ordres de grandeur suivants, à 1 kHz :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{seuil d'audition} & I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2} \\ \text{seuil de douleur} & I_1 = 10^{+2} \text{ W.m}^{-2} \end{array} \right.$$

La largeur de cet intervalle a conduit à utiliser une échelle logarithmique ; on définit l'intensité relative en décibels par

$$I_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Ainsi, le seuil d'audition correspond à 0 dB, tandis que le seuil de douleur se situe à 140 dB.

b Cas d'une OPPS

Prenons le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale dans le sens des x croissants. La surpression peut se mettre sous la forme

$$\underline{p}_1 = p_{01} e^{i\omega(t-x/c)}$$

La vitesse acoustique correspondante est donnée par

$$\mu_0 i \omega \underline{v}_1 = - \overrightarrow{\text{grad}} \underline{p}_1 = i \frac{\omega}{c} p_{01} e^{i\omega(t-x/c)} \overrightarrow{e}_x$$

soit

$$\underline{v}_1 = \frac{p_{01}}{\mu_0 c} e^{i\omega(t-x/c)} \overrightarrow{e}_x = \frac{p_1}{\mu_0 c} \overrightarrow{e}_x$$

En représentation réelle, on a donc

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{p_1}{\mu_0 c} \overrightarrow{e}_x$$

et

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{p_1^2}{\mu_0 c} \overrightarrow{e}_x$$

La valeur efficace de la surpression acoustique à 1 kHz s'en déduit :

$$I_0 \rightarrow p_{eff} = \sqrt{\mu_0 c I_0} = 2.10^{-5} \text{ Pa}$$

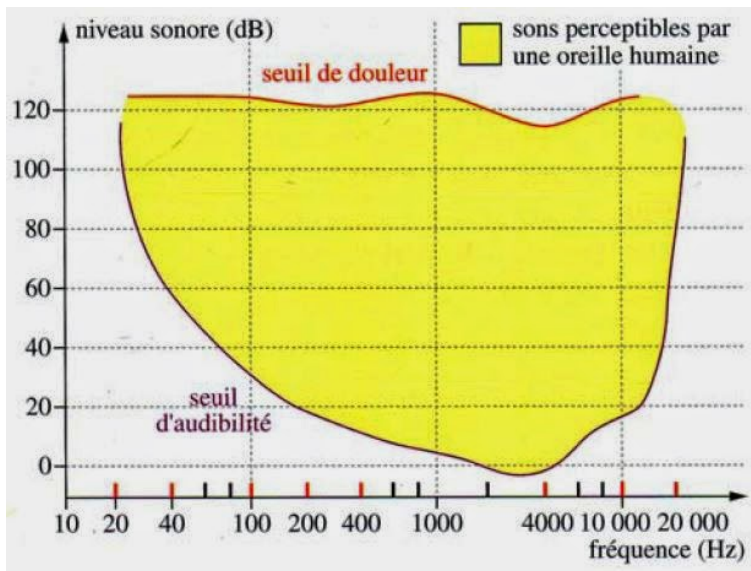
$$I_1 \rightarrow p_{eff} = \sqrt{\mu_0 c I_1} = 2.10^2 \text{ Pa}$$

A l'intensité I_0 et à 1 kHz, on peut également calculer les valeurs efficaces de la vitesse :

$$v_{eff} = 5.10^{-8} \text{ m/s}$$

et du déplacement :

$$x_{eff} = \frac{v_{eff}}{\omega} = 8.10^{-12} \text{ m}$$



c Valeurs numériques

	Intensité W.m^{-2}	Niveau sonore dB	surpression p_1 (Pa)	vitesse v_1 (m.s^{-1})
seuil d'audition	10^{-12}	0	$3 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-8}$
chuchotement	10^{-10}	20	$3 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-7}$
forêt	10^{-8}	40	$3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-6}$
conversation	10^{-6}	60	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$
cris	10^{-4}	80	$3 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-4}$
marteau piqueur	10^{-2}	100	3	$7 \cdot 10^{-3}$
seuil de douleur	1	120	30	$7 \cdot 10^{-2}$

IV Solutions en ondes sphériques

IV.1 Définition

On appelle onde sphérique, une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères concentriques.

Onde sphérique : $p_1(M, t) = p_1(r, t)$ avec p_1 qui est régi par l'équation de d'Alembert 3D :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 r p_1}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Les solutions sont de la forme :

$$p_1(M, t) = \underbrace{\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)}_{\text{Onde sphérique divergente}} + \underbrace{\frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)}_{\text{Onde sphérique convergente}}$$

IV.2 Ondes sphériques harmoniques ou sinusoidale

Une onde sonore sphérique harmonique est une onde sphérique pour laquelle la surpression p_1 est de la forme :

$$p_1(M, t) = \frac{1}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}_1(M, t) = \frac{p_{01}}{\mu_0 c r} \left[\cos(\omega t - kr + \varphi_0) + \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr + \varphi_0) \right] \vec{e}_r$$

IV.3 Puissance rayonnée

V Réflexion et transmission d'une OPPS sous incidence normale

V.1 Position du problème

Une onde incidente (pour $x < 0$) :

- $p_i(x, t) = p_{i0} \cos(\omega t - k_1 x)$ avec $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$
- $\vec{v}_i(x, t) = v_{i0} \cos(\omega t - k_1 x) \vec{e}_x$

Cette onde incidente donne naissance à deux OPPS de même pulsation, une onde transmise ($x > 0$) :

- $p_t(x, t) = p_{t0} \cos(\omega t - k_2 x)$ avec $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$
- $\vec{v}_t(x, t) = v_{t0} \cos(\omega t - k_2 x) \vec{e}_x$

et une onde réfléchie ($x < 0$) :

- $p_r(x, t) = p_{r0} \cos(\omega t - k_1 x)$
- $\vec{v}_r(x, t) = -v_{r0} \cos(\omega t + k_1 x) \vec{e}_x$

V.2 Conditions aux limites

V.3 Continuité de p en $x = 0$

$$p_1(0, t) = p_2(0, t)$$

V.4 Continuité de $\vec{v}$ en $x = 0$

$$\vec{v}_1(0, t) = \vec{v}_2(0, t)$$

V.5 Coefficients de transmission et de réflexion en amplitude

V.6 Coefficients de transmission et de réflexion en puissance