

PROBLÈME

En voiture !

Partie I - Principe des capteurs pneumatiques

Un véhicule est détecté lors de son passage sur un tube en caoutchouc placé perpendiculairement à la chaussée (figure 1). Le tube est bouché à une extrémité et relié à un compteur à l'autre extrémité. Les roues du véhicule écrasent localement le tube. Il s'ensuit une variation de pression dans le tube qui se propage jusqu'aux extrémités. Le compteur associé transforme ce déplacement d'air en signal électrique.

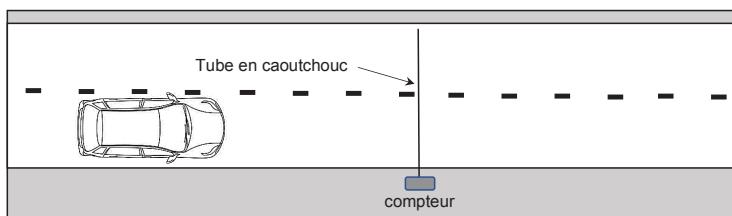


Figure 1 - Capteur pneumatique

I.1 - Propagation des ondes acoustiques dans un tube souple

On considère un tube en caoutchouc de section circulaire et d'axe Ox rempli d'air (figure 2). Au repos, l'air a une masse volumique μ_0 et une pression intérieure P_0 égale à la pression extérieure. À l'équilibre, on suppose que le champ des vitesses est nul et que la section du tube est uniforme et notée A_0 .

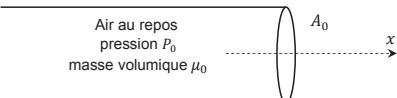


Figure 2 - Tube de section A_0 rempli d'air au repos

On s'intéresse à la propagation de perturbations de petites amplitudes suivant l'axe Ox , ce qui permet de se placer dans l'approximation acoustique. Les champs de vitesse, de pression et de masse volumique s'expriment alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{v}(x, t) &= v(x, t)\vec{u}_x \text{ où } \vec{u}_x \text{ est le vecteur unitaire selon la direction } Ox \\ P(x, t) &= P_0 + p_1(x, t) \text{ où } |p_1(x, t)| \ll P_0 \\ \mu(x, t) &= \mu_0 + \mu_1(x, t) \text{ où } |\mu_1(x, t)| \ll \mu_0.\end{aligned}$$

$\vec{v}(x, t)$ est appelée la vitesse acoustique et $p_1(x, t)$ est la surpression par rapport à P_0 . On suppose que ces grandeurs sont uniformes sur une section du tube, les effets de la pesanteur étant négligés.

L'air est considéré comme un gaz parfait, on ne tient pas compte de la viscosité ni des échanges thermiques à l'intérieur du tube au sein de l'air. Les détentes et les compressions locales du fluide sont isentropiques.

Le coefficient de compressibilité isentropique, constant, s'écrit :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu(x, t)} \left(\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial P(x, t)} \right)_S.$$

Le tube se déforme sous l'effet de l'augmentation de la pression interne. La section $A(x, t)$ du tube varie légèrement, devenant dépendante de l'abscisse x et du temps t .

On pose alors :

$$A(x, t) = A_0 + a_1(x, t) \text{ où } |a_1(x, t)| \ll A_0.$$

On peut alors décrire ce phénomène par un paramètre D , appelé distensibilité du tube qui s'exprime comme :

$$D = \frac{1}{A(x, t)} \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial P(x, t)} \right)_S.$$

La distensibilité, supposée constante, caractérise l'aptitude du tube à se déformer au passage de l'onde de pression.

Équation de la conservation de la masse

On étudie comme système une tranche d'air d'épaisseur dx située entre les abscisses x et $x + dx$, sur un intervalle de temps entre t et $t + dt$.

Q1. Exprimer la masse $dm(t)$ de ce système à l'instant t en fonction de $A(x, t)$, $\mu(x, t)$ et de dx . De la même manière, exprimer $dm(t + dt)$ à l'instant $t + dt$.

Q2. Exprimer la masse δm_e de fluide entrant dans ce système pendant la durée dt en fonction de $\mu(x, t)$, $v(x, t)$, $A(x, t)$ et dt . De la même manière, exprimer la masse δm_s sortant de ce système pendant la même durée.

Q3. En réalisant un bilan de masse sur le système considéré, établir avec soin que l'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mu(x, t)A(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)A(x, t)v(x, t)] = 0.$$

Q4. En se limitant aux termes d'ordre 1, montrer que l'on obtient l'équation linéarisée suivante :

$$\mu_0 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \mu_1(x, t)}{\partial t} + \mu_0 A_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Équation d'Euler

Q5. Rappeler l'équation d'Euler régissant la dynamique des fluides parfaits en tenant compte des hypothèses de l'étude. Préciser le nom des deux termes qui composent la dérivée particulaire.

Q6. Linéariser l'équation d'Euler afin d'établir une relation entre μ_0 , $v(x, t)$ et $p_1(x, t)$. La relation obtenue est notée (2).

Distensibilité du tube

Q7. En linéarisant l'expression de la distensibilité, montrer que a_1 est proportionnel à p_1 . La relation obtenue est notée (3).

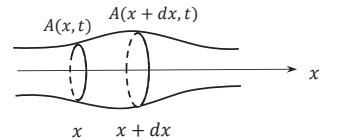


Figure 3 - Système étudié : tranche d'air d'épaisseur dx

Coefficient de compressibilité isentropique

Q8. Linéariser l'expression du coefficient de compressibilité isentropique et montrer que μ_1 est proportionnel à p_1 . La relation obtenue est notée (4).

Équation de propagation des ondes sonores dans le tube souple

Q9. À l'aide des relations (1), (3) et (4), démontrer la relation suivante :

$$(\chi_s + D) \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Q10. Montrer que la surpression $p_1(x, t)$ obéit à une équation d'onde de type d'Alembert avec une célérité c qui sera exprimée en fonction de χ_s , D et de μ_0 . Vérifier l'unité de c .

Q11. Calculer numériquement la valeur de c avec $D = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$, $\chi_s = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ et $\mu_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

I.2 - Traitement des données numériques

Lorsqu'un véhicule passe, la roue écrase le tube et l'air à l'intérieur du tube est repoussé. Une extrémité du tube est connectée à un compteur qui contient un capteur de pression (**figure 1**). La surpression est détectée par le capteur et enregistrée.

Le comptage de ces surpressions permet de recenser le nombre de véhicules passés.

Les données sont archivées dans un tableau de type array nommé `mesures` dont chaque ligne représente 24 heures de comptage et chaque valeur le nombre de véhicules recensés par heure.

Sur l'exemple ci-dessous, le nombre grisé 4 indique que 4 véhicules ont circulé le premier jour du recensement entre 0 et 1 heure du matin. Le nombre grisé 214 indique que 214 véhicules ont circulé le deuxième jour entre 10 et 11 heures du matin.

```
mesures = [[4, 10, 12, 17, 27, 70, 100, 219, 462, 329, ... ],
           [3, 12, 11, 20, 30, 68, 95, 218, 468, 365, 214, 156, ... ],
           [...],
           ...]
```

Q12. En pratique, il est recommandé de changer le tube après une utilisation de 15 jours. Justifier cette recommandation.

Le tableau `mesures` comporte 10 lignes.

Q13. Combien de jours a duré l'enregistrement ?

Q14. Compléter l'instruction 1 de l'**algorithme 1** (page 5) qui permet d'afficher le nombre de véhicules détectés le cinquième jour entre 13 et 14 heures.

Q15. Compléter les instructions 2 de l'**algorithme 1** qui affichent le nombre de véhicules recensés chaque jour.

Q16. Compléter les instructions 3 de l'**algorithme 1** afin d'obtenir et d'afficher le plus grand nombre de véhicules détectés, d'afficher le jour correspondant ainsi que le créneau horaire correspondant.

Q17. Compléter les instructions 4 de l'**algorithme 1** afin d'obtenir les résultats de la **figure 4** :

- a. L'instruction 4.1 définit le type de graphique ;
- b. L'instruction 4.2 définit la grandeur à tracer ;
- c. L'instruction 4.3 permet d'afficher la grille ;
- d. L'instruction 4.4 indique le titre de l'axe des abscisses ;
- e. L'instruction 4.5 indique le titre de l'axe des ordonnées ;
- f. L'instruction 4.6 nomme le graphique.

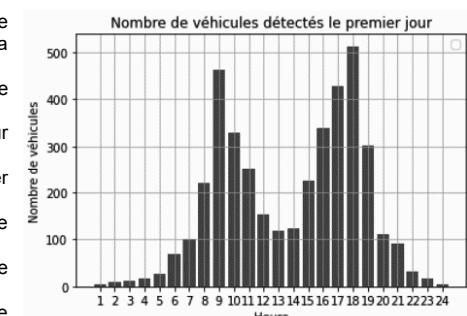


Figure 4 - Diagramme à bâtons représentant le nombre de véhicules détectés par heure le premier jour

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#récupération des mesures
file=open('enregistrement.txt','r')
mesures=file.readlines()

print([instruction 1])

for i in [instruction 2.1]:
    print('nombre de véhicules détectés le',i,'ème jour :',[instruction 2.2])

max=0
for i in [instruction 3.1]:
    for j in [instruction 3.2]:
        if [instruction 3.3]:
            max=[instruction 3.4]
            jour,heure=[instruction 3.5]
    print('le pic vaut',max,'véhicules/heure')
    print('pic atteint le',[instruction 3.6],'ème jour entre',[instruction 3.7],'et',[instruction 3.8],'heures')

heure=[k for k in range(1,25)]
plt.[instruction 4.1](heure,[instruction 4.2])
plt.[instruction 4.3]
plt.[instruction 4.4]
plt.[instruction 4.5]
plt.[instruction 4.6]
```

Algorithme 1 - Traitement des données numériques

ANNEXE

Quelques commandes utiles en langage Python

A - Bibliothèque NUMPY de Python (gestion des tableaux, matrices, vecteurs)

B - Bibliothèque MATPLOTLIB.PYPLOT de Python (gestion des graphes)

A - Bibliothèque NUMPY de Python (gestion des tableaux, matrices, vecteurs)

`np.zeros((n,m))`

Description : fonction créant une matrice (tableau) de taille $n \times m$ dont tous les éléments sont nuls.

Argument d'entrée : un tuple de deux entiers correspondant aux dimensions de la matrice à créer.

Argument de sortie : un tableau (matrice) d'éléments de type flottant et égaux à 0.

Exemple :	Commande	Résultat
	<code>np.zeros((3,4))</code>	<code>[[0. 0. 0. 0.] [0. 0. 0. 0.] [0. 0. 0. 0.]]</code>

`A[i,j]`

Description : fonction qui retourne l'élément numéroté (i, j) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne numérotée i de la matrice A, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne numérotée j de la matrice A, on utilise la syntaxe `A[:, j]`.

Argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A.

Arguments de sortie : l'élément appartenant à la ligne numérotée i et à la colonne numérotée j de la matrice A.

RAPPEL : en langage Python, les lignes d'un tableau A de taille $n \times m$ sont numérotées de 0 à $n-1$ et les colonnes sont numérotées de 0 à $m-1$.

Exemple :	Commande	Résultat
	<code>A=np.array([[3,4,10],[1,8,7]])</code>	
	<code>A[0,2]</code>	10
	<code>A[1,:]</code>	[1 8 7]
	<code>A[:,2]</code>	[10 7]

`np.sum(a)`

Description : somme tous les éléments de a.

Argument d'entrée : a, une liste de valeurs numériques.

Argument de sortie : somme des valeurs numériques de la liste a.

Exemple	a=[1,2,3]
Commande	Résultat
	<code>np.sum(a)</code> 6

B - Bibliothèque MATPLOTLIB.PYPLOT de Python (gestion des graphes)

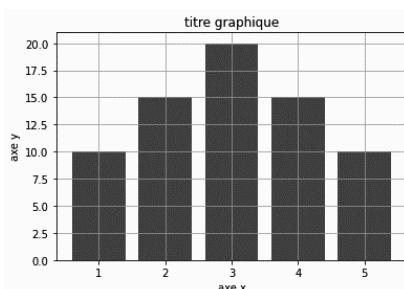
Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.bar(x, hauteur)
```

Description : fonction permettant de tracer un graphique à barres dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x. hauteur est une liste qui contient la hauteur des barres.

Argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées hauteur (tableau de n éléments).

Argument de sortie : un graphique à barres.



Exemple

```
x = [1,2,3,4,5]
hauteur = [10,15,20,15,10]
plt.bar(x,hauteur) # tracé du graphique à barres
plt.title('titre_graphique') # titre du graphique
plt.xlabel('axe x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('axe y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.grid() # affichage de la grille
```

FIN