Diffusion thermique

I Généralités

I.1 Équilibre thermodynamique local

Soit Σ un système thermodynamique macroscopique. On peut découper ce système en volumes mésoscopiques pouvant être considérés comme des systèmes à l'état d'équilibre.

I.2 Mécanismes de transfert thermique

a La conduction thermique

La conduction (ou diffusion) thermique est un mode de transport thermique sans déplacement macroscopique de matière. Ce transfert s'effectue de proche en proche des parties chaudes vers les parties froides, grâce à l'agitation thermique.

b La convection thermique

La convection est un mode de transfert thermique qui implique un déplacement collectif de fluide. La matière fluide chaude, en se déplaçant, cède de l'énergie aux parties plus froides.

On distingue deux types de convection :
- La **convection naturelle** est induite lorsque c'est le gradient de température qui provoque le mouvement du fluide.
- La **convection forcée** est provoquée par une circulation artificielle d'un fluide.

c Le rayonnement

Le rayonnement décrit le transport d'énergie via la propagation d'onde électromagnétique. Ce transfert d'énergie est toujours présent, même dans le vide.

II Flux thermique

II.1 Les grandeurs descriptives

La première grandeur à introduire est la densité volumique d'énergie interne $u(M,t)$.

La seconde grandeur, le vecteur densité de courant thermique, est un vecteur $\overrightarrow{j_Q}(M,t)$; elle décrit le transport d'énergie thermique. Son flux à travers une surface $\mathcal{S}$ représente la puissance thermique traversant la surface, également appelée flux thermique.

II.2 Vecteur densité de courant thermique

Le vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}(M,t)$ est tel que le transfert thermique élémentaire $\delta^2 Q$ à travers la surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit :

$$\delta^2 Q = \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}\ \mathrm{d}t$$

II.3 Flux thermique

Le flux thermique noté Φ_{th} désigne la puissance thermique qui traverse une surface.

a À travers une surface orientée $\mathscr{S}$

$$\Phi_{\mathrm{th}}(t) = \iint\limits_{M\in\mathscr{S}} \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$

b Pour un système fermé Σ avec $\mathscr{S}$ surface de contrôle

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le système Σ **reçoit** δQ tel que

$$\delta Q = \Phi_{\mathrm{th}}(t)\mathrm{d}t = -\oiint\limits_{M\in\mathscr{S}} \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \mathrm{d}S_m\overrightarrow{n_M}$, **normale sortante**.

II.4 Loi de Fourier

Expérimentalement, si les variations de températures ne sont pas trop importantes, on rend compte localement des phénomènes de conduction de la chaleur par la **loi de Fourier**, à savoir le vecteur densité de flux de chaleur $\overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}}$ est égal à :

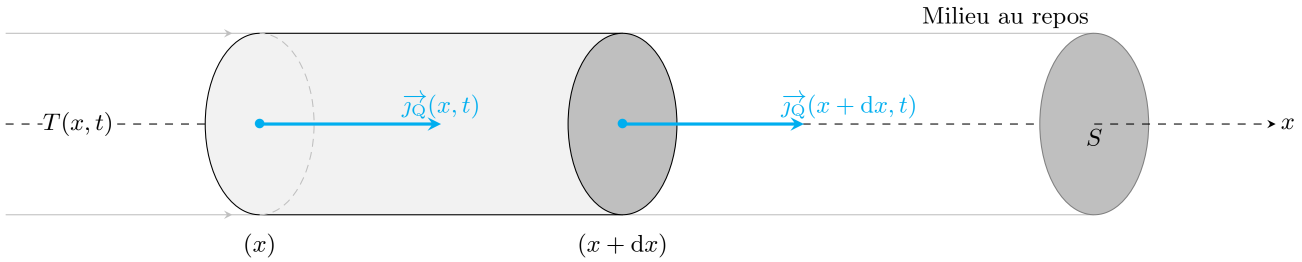
$$\overrightarrow{j_{\mathrm{Q}}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$$

λ est la conductivité thermique.

Milieu	Air	Eau	Bois	Verre	Béton	Brique
λ en W.m^{-1}.K^{-1}	0,03	0,6	0,3	1,2	0,92	0,84
Milieu	Cuivre	Aluminium	Acier-Inox	Laine de verre	Polystyrène expansé	
λ en W.m^{-1}.K^{-1}	390	237	26	0,03-0,04	0,036	

III Bilan thermique

III.1 Bilan local pour un transfert unidimensionnel



Bilan thermique local (savoir l'établir) :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}=\begin{cases}0 & \text{en l'absence de sources}\\[2ex] p(x,t) & \text{avec un taux production interne } p\end{cases}}$$

III.2 Bilan local en symétrie cylindrique

III.3 Bilan local en symétrie sphérique

III.4 Généralisation du bilan local

III.5 Équation de la diffusion thermique

ou équation de la chaleur, avec un terme de production local :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c}\Delta T+\frac{p}{\rho c}}$$

En l'absence de terme de production :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\lambda}{\rho c}\Delta T\quad\text{: équation de diffusion}}$$

IV Résolution de l'équation de la chaleur

IV.1 Généralités

Résoudre l'équation de la chaleur consiste à déterminer le champ de température en fonction du temps dans un espace donné sachant que l'on connaît les conditions initiales ainsi que les propriétés sur la frontière.

Dans la pratique on distingue différents cas.

— Le système est en contact parfait avec un thermostat de température T_{ext}. À chaque instant on a la condition aux limites

$$T(M,t) = T_{ext} \quad \forall M \in \mathcal{S}$$

— Le système est solide et présente une surface de contact avec un autre solide. Si le contact n'est pas parfait, la température n'est pas continue. Cependant le flux thermique est continu.

$$\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(M,t) \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{j_{\mathrm{Q}_\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{n} \quad \forall M \in \mathcal{S}$$

— Le système est parfaitement calorifugé c'est-à-dire entouré d'une paroi adiabatique. Dans ce cas,

$$\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(M,t) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

— Le système présente une paroi en contact avec un fluide : la loi de Newton relative à la convection impose alors une condition sur le flux thermique.
Loi de Newton : Au voisinage d'un solide de température de surface T, un fluide en mouvement à la température T_fluide reçoit une densité de courant thermique

$$\overrightarrow{j_\mathrm{Q}}(M,t) = h\left(T(M,t) - T_\mathrm{fluide}\right)\overrightarrow{n}_{\mathrm{solide}\rightarrow\mathrm{fluide}}$$

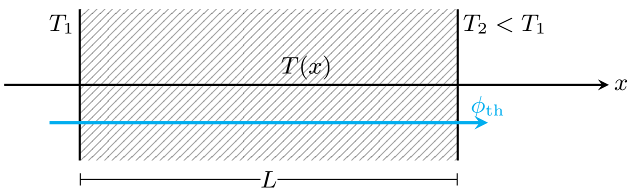
où h désigne le coefficient de transfert thermique (en la normale dirigée vers l'extérieur de la surface solide. Le coefficient h dépend surtout des propriétés de l'écoulement dans la couche limite située entre le solide et le fluide.

IV.2 Cas du régime stationnaire en l'absence de source interne

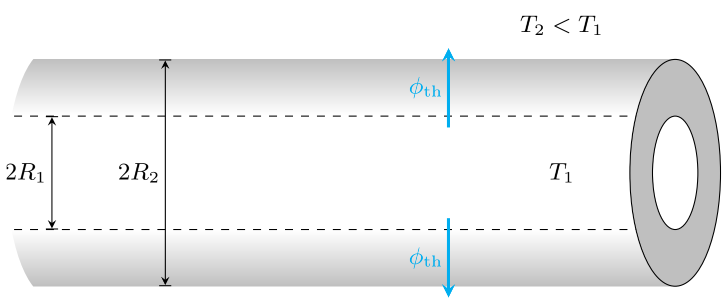
a Conservation du flux

b Exemples de champ de température

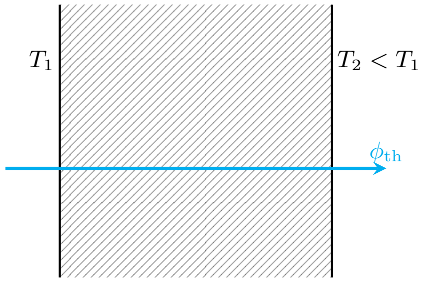
<u>Cas 1DD</u>



<u>Géométrie cylindrique</u>



c Résistance thermique



En régime stationnaire

$$T_1 - T_2 = R_{\rm th}\Phi_{\rm th 1\to 2}$$

Analogie avec l'électricité :

	Conduction thermique	Conduction électrique
Grandeur transportée	énergie interne U	charge q
Loi d'Ohm	$T_1 - T_2 = R_{th}\Phi_{th,1\to 2}$	$V_1 - V_2 = RI_{1\to 2}$
Résistance	$R_{th} = \dfrac{L}{\lambda S}$	$R = \dfrac{\rho_{\rm elec}L}{S} = \dfrac{L}{\sigma S}$
Flux	$\Phi_{th} = \iint\limits_{M\in\mathscr{S}} \vec{j}_{\rm Q}(M,t).\overrightarrow{dS}_M$	$I = \iint\limits_{M\in\mathscr{S}} \vec{j}_{elec}(M,t).\overrightarrow{dS}_M$
Lois	$\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{\rm grad}\,T$	$\vec{j}_{elec} = -\sigma\,\overrightarrow{\rm grad}\,V$
Association série	$R_{th,serie} = R_{th,1} + R_{th,2}$	$R_{serie} = R_1 + R_2$
Association parallèle	$\dfrac{1}{R_{th,//}} = \dfrac{1}{R_{th,1}} + \dfrac{1}{R_{th,2}}$	$\dfrac{1}{R_{//}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

IV.3 Un exemple non stationnaire, effet de cave

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. La température au niveau du sol est :

$$T(0) = T_m + a\cos(\omega t)$$

1. Le coefficient de diffusivité thermique du sol étant estimé à $\kappa = 3{\cdot}10^{-7}$ m^2.s^{-1}, on cherche à construire un modèle permettant de déterminer la profondeur à laquelle on doit creuser une cave dans une région où les écarts de température entre le jour et la nuit atteignent 30^{o}C si l'on veut que les écarts de température dans la cave restent inférieurs à 0,5^{o}C.
   (a) Établir l'équation de diffusion thermique en coordonnées cartésiennes.
   (b) On cherche des solutions de la forme $T(x,t) = T_m + \theta(x,t)$, quelle équation différentielle régit $\theta(x,t)$?
   (c) On utilise alors les notations complexes et on cherche des solutions de la forme $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$. En déduire que $\underline{f}$ vérifie :
   $$\frac{d^2\underline{f}}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2}\underline{f} = 0$$
   Quelle est l'expression de δ ?
   (d) Établir l'expression de $\underline{f}(x)$.
   (e) Donner l'expression de $T(x,t)$ en fonction de T_m, a, δ et ω.

   (f) Quel est le décalage temporel entre les oscillations diurnes de température en surface et dans la cave ?

2. (a) Les écarts saisonniers de température étant de 15^oC en surface, quel est cet écart dans la cave ?
   (b) Quel est le décalage temporel entre les oscillations saisonnières de température en surface et dans la cave ?