Systèmes ouverts en régime stationnaire

Applications directes du cours

1. Différencier la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$.

2. Différencier la fonction $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$.

3. Montrer que $df = (2xy+b)dx + x^2 dy$ est une différentielle exacte. En déduire l'expression de $f(x,y)$ sachant que $f(0,0) = 0$.

4. On part de la relation $PV = nRT$ où n et R sont des constantes. Vérifier que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

5. Différencier l'équation d'état des gaz parfait.

6. Donner la différentielle logarithmique de l'équation d'état des gaz parfaits.

7. Montrer que l'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter.

8. Montrer que les transferts thermiques se font du corps chaud vers le corps froid (énoncé de Clausius du second principe).

9. Rappeler la loi de Laplace en P et V ainsi que ses conditions d'application. En déduire les variantes en T, V et en T, P.
On considère n moles de gaz parfait, de coefficient γ, soumis seulement aux forces de pression, et qui subit une transformation adiabatique réversible. On rappelle que pour un gaz parfait $\mathscr{C}_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$. Montrer que $\dfrac{nR}{\gamma-1}dT = -PdV$. En déduire que $VdP = -\gamma PdV$. Intégrer cette relation par séparation des variables et conclure.

10. Détente de Joule-Kelvin : un fluide s'écoule lentement à travers un bouchon poreux dans une conduite horizontale de section constante S. Le régime stationnaire est supposé atteint. Montrer que cette détente est isenthalpique.

11. Dans le cas d'un moteur ditherme, le système (Σ) cède du travail à l'extérieur.
    1. Montrer que le système reçoit alors un transfert thermique de la source chaude et cède un transfert thermique à la source froide.
    2. Définir l'efficacité thermodynamique du moteur.
    3. Montrer que
    $$e \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$
    4. Calculer l'efficacité maximale obtenue dans le cas d'une machine réversible.
    5. Donner l'allure du cycle (cycle de Carnot) dans un diagramme (T,S).
    6. Dans le cas particulier d'un gaz parfait, donner l'allure du cycle dans un diagramme de Watt.

$\boxed{1}$ $df = 2\frac{x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$. $\boxed{2}$ $ds = S_0 \sin(\omega t - kx)(kdx - \omega dt)$. $\boxed{3}$ $f(x,y) = x^2y + bx$. $\boxed{4}$ $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P}$, $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{nR}$. $\boxed{5}$ $PdV + VdP = nRdT$. $\boxed{6}$ $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$. $\boxed{7}$ $dS = 0 + \delta S_{ech} \geq 0$. $\boxed{8}$ Il faut raisonner sur deux corps de températures différentes en contact thermique. $\boxed{9}$ Conditions : GP + réversible + adiabatique. $PV^\gamma = cste$, $P^{1-\gamma}T^\gamma = cste1$, $TV^{1-\gamma} = cste2$. $\boxed{10}$ cf cours. $\boxed{11}$ cf cours.

Exercices

1. Température d'un fil parcouru par un courant

À partir de l'instant $t = 0$, un fil est parcouru par un courant d'intensité constante i. On note R sa résistance et C sa capacité calorifique. Le fil est en contact thermique avec l'atmosphère, dont la température est constante et égale à θ_0. Le fil perd ainsi une quantité de chaleur par unité de temps proportionnelle à l'écart $\theta - \theta_0$ des températures du fil et de l'atmosphère.

1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $\theta(t)$.
2. Déterminer $\theta(t)$ si $\theta(t = 0) = \theta_0$.
3. Que se passe-t-il si le fil est parcouru par un courant alternatif ?

2. Neige artificielle

Un canon à neige pulvérise dans l'air à la température $T_e = -15^o$C des gouttelettes d'eau de rayon $R = 10$ μm et de température $T_i = 10^o$C supposée uniforme. La gouttelette entretient avec l'air des échanges thermiques de puissance :

$$P_{th} = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h(T(t) - T_e) \qquad \text{où } h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1},$$

$T(t)$ est la température instantanée de la gouttelette. La pression ambiante est constante $p_0 = 1$ bar.

1. À l'aide du premier principe appliqué à l'eau de la gouttelette pendant une durée dt, établir l'équation différentielle d'évolution de sa température (supposée uniforme).
2. Calculer le temps nécessaire pour qu'une gouttelette atteigne la température $T_s = -5^o$C, dite température de surfusion puisque l'eau reste liquide.
3. L'état de surfusion est alors rompu. Calculer alors la fraction massique de glace qui se forme. On supposera la transformation suffisamment rapide pour être considérée adiabatique et isobare.
4. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau.
5. Calculer la variation d'entropie totale de la goutte.

Données :
masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1,00 \cdot 10^3$ kg.m^{-3},
capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_\ell = 4,18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}, chaleur latente de fusion de la glace à 0^oC : $\ell = 333$ kJ.kg^{-1}, capacité thermique massique de la glace : $c_g = 2,08$ kJ.kg^{-1}.K^{-1},
pour une phase condensée $s(T, P) = s(T_0, P_0) + c \ln\left(\dfrac{T}{T_0}\right)$. Un local, de capacité thermique à pression constante $C_p = 4 \cdot 10^3$ kJ.K^{-1}, est initialement à la température de l'air extérieur $T_{ext} = 305$ K. Un climatiseur, qui fonctionne de façon cyclique réversible ditherme (entre l'air extérieur et le local), ramène la température du local à $T_f = 293$ K en une heure.

1. Quel est le rendement η de ce climatiseur si le local est à la température T ?
2. Exprimer la chaleur totale Q échangée par le climatiseur avec le local pendant la transformation.
3. Exprimer le travail total W échangé par le climatiseur pendant la transformation.
4. Quelle puissance électrique moyenne $< P >$ a dû recevoir ce climatiseur ?

3. Mélangeur de douche

On s'intéresse à un mélangeur de douche supposé parfaitement calorifugé. L'écoulement d'eau chaude, de débit volumique D_1, provient d'un chauffe-eau à température $T_1 = 65^o$C. Celui d'eau froide, de débit D_2, est à la température $T_2 = 12^o$C. La pression est identique dans les deux canalisations et vaut $P = 3$ bar.
Déterminer les débits d'eau chaude et d'eau froide pour que l'eau sorte du pommeau de douche à la température $T = 38^o$C et avec un débit total $D = 0,20$ L$\cdot$s^{-1}. On s'intéresse à un écoulement unidimensionnel (suivant x) d'un gaz parfait en régime stationnaire dans un cylindre de section variable, la tuyère. On supposera le fonctionnement réversible et les parois athermes : l'écoulement est isentropique. On se place dans le référentiel de la tuyère.
Les notations sont les suivantes : $S(x)$ est la section de la tuyère à la cote x, et $r(x)$ son rayon, $P(x)$ la pression, $T(x)$ la température, $v(x)$ le volume massique et $c(x)$ la vitesse du gaz.
Pour les applications numériques, on s'intéressera à l'air $M = 29$ g$\cdot$mol^{-1} et $\gamma = 1,4$.

1. Faire un bilan pour un système ouvert infinitésimal (de longueur dx) sur l'enthalpie massique h.
   De même, faire un bilan d'entropie massique s. Écrire ces bilans sous forme différentielle.

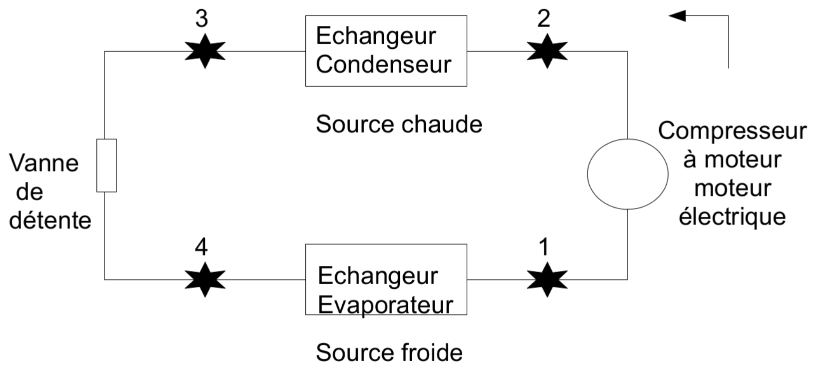
2. Sachant que $s(T, P) = s(T_0, P_0) + c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{R}{M}\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$, déduire de ces deux bilans la relation (1) : $v \cdot dP = -c \cdot dc$.
3. Écrire la conservation du débit vérifiée par $S(x)$, $c(x)$ et $v(x)$. La différencier pour obtenir la relation (2).
4. Montrer que, pour un écoulement isentropique d'un gaz parfait, $dP = c_{son}^2 d\rho$. Que vaut c_{son} ?
   Application numérique pour $T = 300$ K.
   Dans la suite, on considérera que c_{son} est une constante (la température varie peu).
5. En déduire la relation (3) :
$$dP = -\left(\frac{c_{son}}{v}\right)^2 dv$$
6. Grâce aux trois relations, montrer la formule d'Hugoniot :
$$\frac{dS}{S} = \frac{dc}{c}\left(\frac{c^2}{c_{son}^2} - 1\right)$$
   Comment varie S en fonction de c ?
7. On supposera connu $c(x)$. Intégrer alors S en fonction de c.

4. Détermination d'une efficacité par lecture graphique

Une machine frigorifique est utilisée afin de maintenir un local contenant des denrées périssables à 0^oC. Cette machine contient un fluide frigorigène de type Fréon dont le diagramme Température-Entropie massique (T, s) est donné en fin de feuille.

Le mélange liquide-vapeur est situé dans la zone centrale sous la courbe de saturation. Sur ce diagramme apparaissent les isobares et les isenthalpes.

Cette machine ditherme qui fonctionne en régime permanent échange de la chaleur avec une source chaude à $T_c = 40^o$C (atmosphère extérieure) et une source froide à $T_f = 0^o$C (local réfrigéré) Le schéma général de fonctionnement avec le sens de circulation du fluide est ci- dessous.



Compte-tenu du faible débit du Fréon circulant dans les tuyauteries de la machine, les variations d'énergie cinétique seront négligées dans tout le problème.

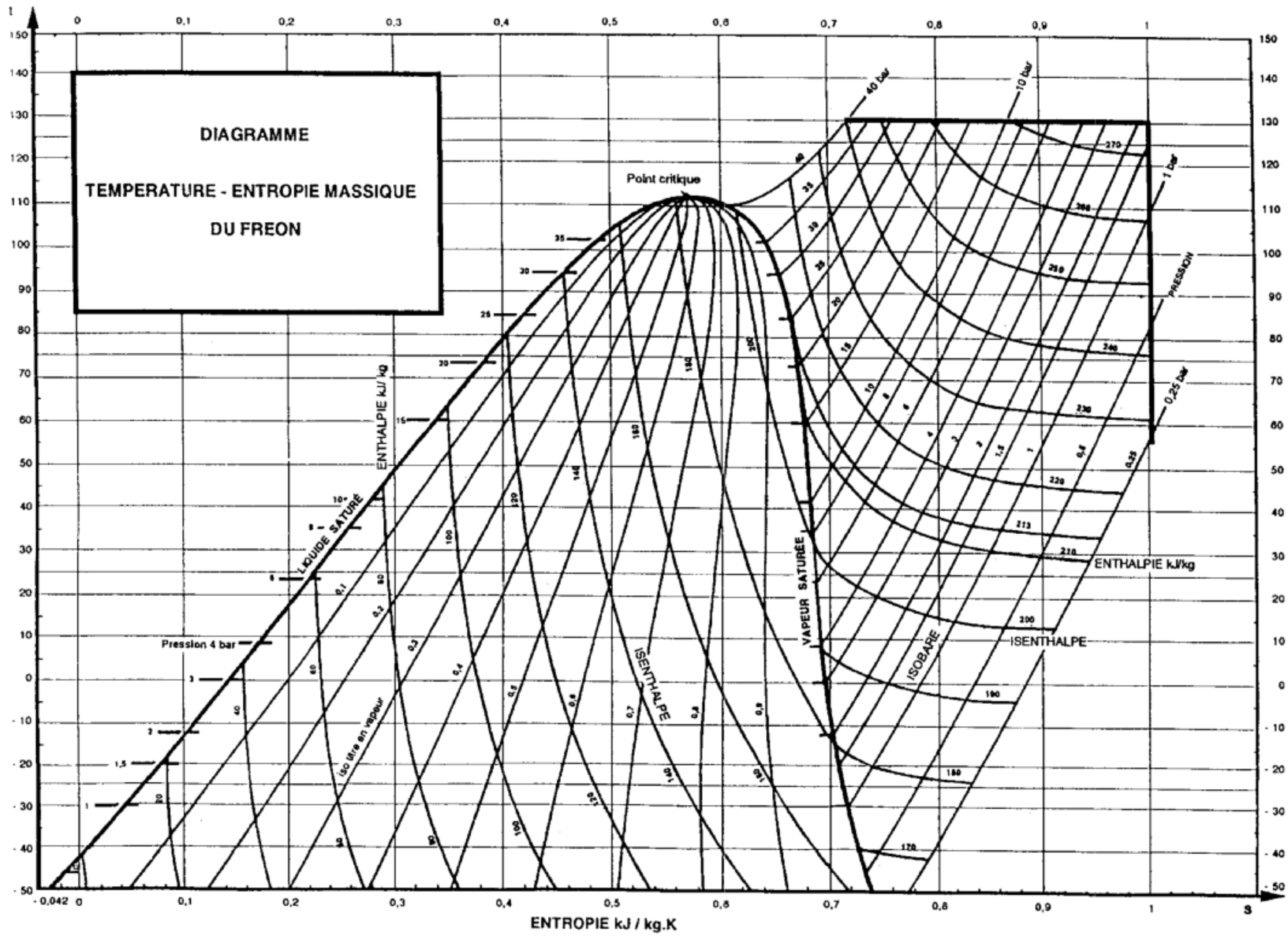
Le cycle décrit par le Fréon présente les caractéristiques suivantes :
- La compression de 1 à 2 est adiabatique réversible
- Le passage dans les deux échangeurs (condenseur et évaporateur) est isobare (de 2 à 3 et de 4 à 1)
- La vanne est considérée comme un tuyau indéformable et ne permettant pas les échanges de chaleur. La détente y est isenthalpique.
- La température du Fréon lors de l'évaporation dans l'évaporateur est de -10^oC.
- La pression de fin de compression en 2 est 15 bar.
- Le point 3 est du liquide saturé.
- La quantité de chaleur échangée dans l'évaporateur avec le local permet une évaporation complète du Fréon venant de 4 et conduit la vapeur de façon isobare jusqu'à la température de -10^oC (point 1, point saturé)

1. Placez les 4 points du cycle 1, 2, 3, 4 sur le diagramme, représentez-y le cycle et déterminez par lecture graphique et interpolation linéaire sur le diagramme les valeurs de P, T, h et s en ces différents points. Regroupez les résultats dans un tableau.

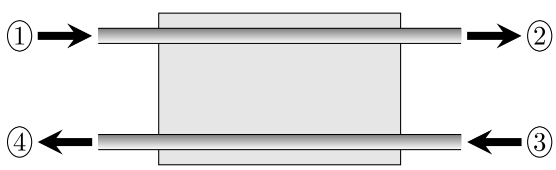
2. Comment peut-on trouver, de deux façons différentes, sur le diagramme la valeur de la chaleur latente massique l_v de vaporisation du Fréon à une température T_0 donnée ?

   Application numérique : Si $P_0 = 3$ bar, quelles sont les valeurs de l_v et de T_0 ?
3. Calculez le titre x_v en vapeur du point 4 de la machine frigorifique. Peut-on définir un titre en liquide ? Quelle est sa valeur en 3 ?
4. En utilisant les résultats de la première question, calculez les quantités de chaleur massique q_c et q_f échangées par le Fréon avec l'extérieur (q_c est échangée de 2 à 3 et q_f de 4 à 1).

   Calculez de même le travail absorbé au cours du cycle.
5. Déduisez-en l'efficacité de la machine frigorifique.



5. Création d'entropie dans un échangeur de chaleur



échangeur

On considère un échangeur thermique parcouru par deux circulations d'eau à contre courant. On suppose l'échangeur parfaitement calorifugé et les écoulements isobares et en régime permanent. On suppose que la capacité thermique à pression constante de l'eau est indépendante de la température. On note T_1 et T_3 les températures d'entrée, T_2 et T_4 les températures de sortie. On note D_m le débit massique dans la conduite $1 \rightarrow 2$ et D'_m le débit massique dans la conduite $3 \rightarrow 4$.

Données numériques :

$$T_1 = 90^oC; T_2 = 20^oC; T_3 = 10^oC; T_4 = 40^oC$$

$$D_m = 1,0 \text{ kg.s}^{-1}; c_p = 4,18.10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

1. Déterminer analytiquement puis calculer numériquement le débit massique D'_m.
2. Déterminer analytiquement puis calculer numériquement l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur.
3. Pour les valeurs précédentes de T_1, T_2 et D_m, peut-on trouver des valeurs de T_3, T_4 et D'_m telles que :
   — l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur soit nulle ?
   — l'entropie créée par unité de temps dans l'échangeur soit négative ?

6. Turbomachine à vapeur d'eau

Un turbopropulseur est constitué d'un compresseur, d'une turbine et de deux échangeurs d'énergie thermique. On fait les hypothèses suivantes :

- le fluide est en régime d'écoulement permanent et on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle.
- le fluide est de la vapeur d'eau. On donne son diagramme entropique.
- le compresseur fonctionne de façon isentropique, l'état du fluide passant de ($P_1 = 10$ bar, $T_1 = 473$ K) à (P_2, T_2). On note $\tau = P_2/P_1$ le taux de compression, $\tau = 10$.
- le fluide est réchauffé de manière isobare dans le premier échangeur de la température T_2 à la température $T_3 = 973$ K.
- le fluide subit une détente isentropique dans la turbine, et le travail ainsi récupéré est utilisé d'une part pour faire fonctionner le compresseur, d'autre part comme travail disponible à l'extérieur. Le fluide sort dans l'état (T_4, P_4).
- Le dernier échangeur isobare lui permet de revenir à l'entrée du compresseur.

1. Représenter le schéma synoptique de cette machine en y précisant les échanges énergétiques. Tracer le cycle suivi par le fluide dans les 2 diagrammes en annexe : est-ce un moteur ou un récepteur ? Peut-on considérer que la vapeur d'eau est un gaz parfait ?
2. Donner l'état du fluide en chaque point de l'installation.
3. Exprimer et calculer le rendement η de la machine. Le cycle est-il réversible ?
4. La température de sortie du compresseur est en réalité de $T'_2 = 823$ K. Si on suppose que l'évolution du fluide est toujours adiabatique, exprimer le nouveau rendement de la machine et calculer la création d'entropie pendant la compression puis sur le cycle.

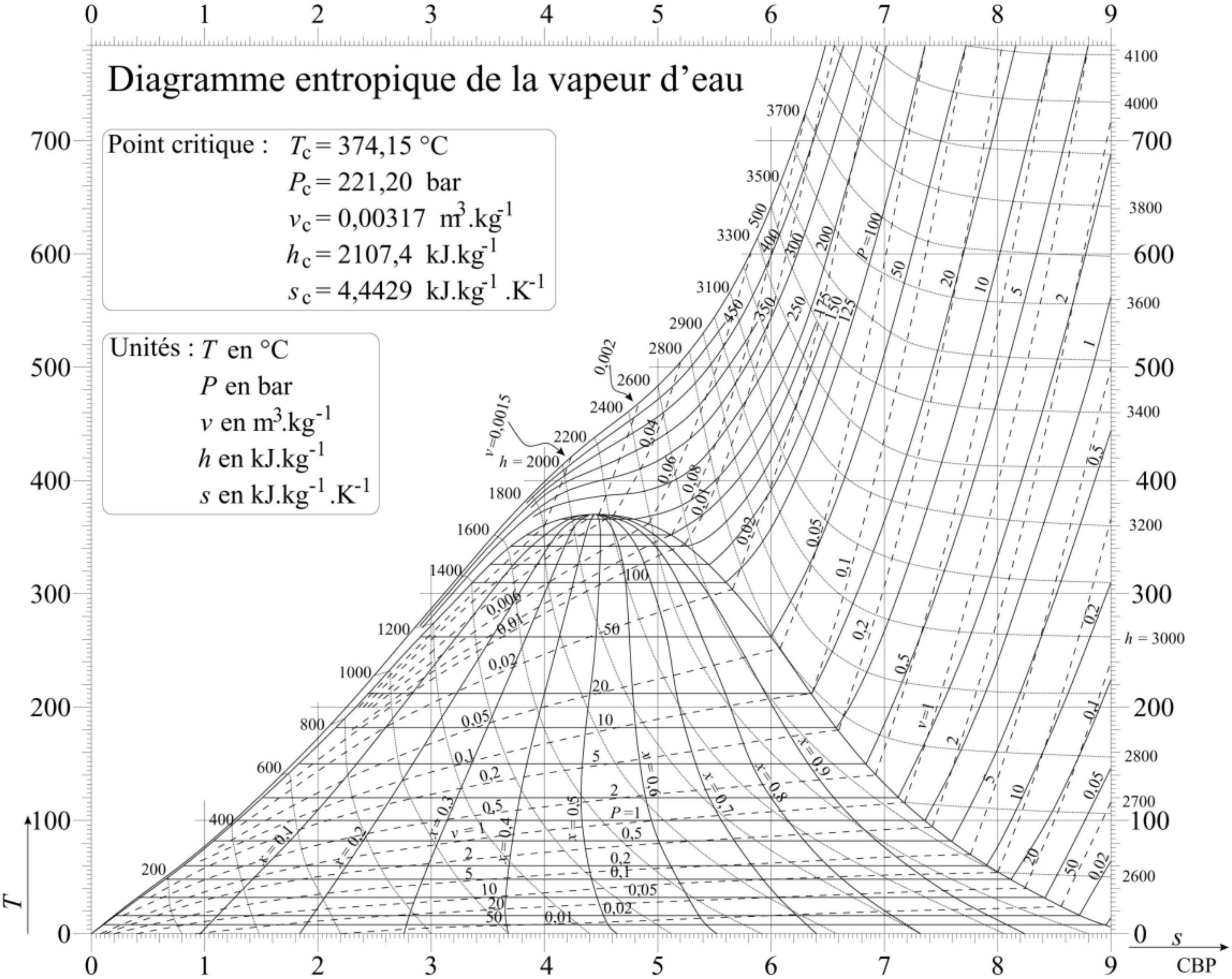
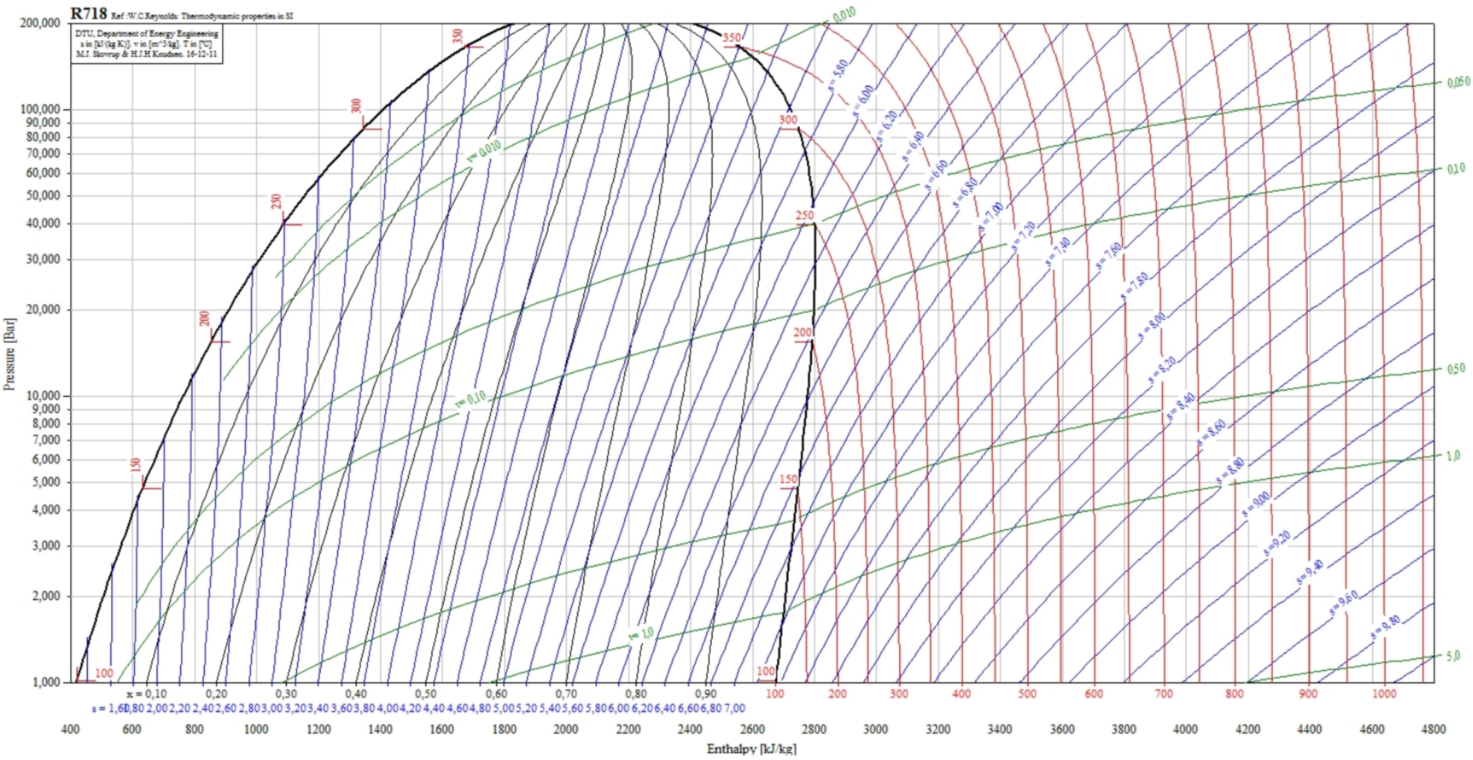


Diagramme entropique de la vapeur d'eau
Point critique : T_c = 374,15 °C
P_c = 221,20 bar
v_c = 0,00317 m^3.kg^{-1}
h_c = 2107,4 kJ.kg^{-1}
s_c = 4,4429 kJ.kg^{-1}.K^{-1}
Unités : T en °C
P en bar
v en m^3.kg^{-1}
h en kJ.kg^{-1}
s en kJ.kg^{-1}.K^{-1}
T
s
CBP
h = 3000


R718 Ref.:W.C.Reynolds: Thermodynamic properties in SI
DTU, Department of Energy Engineering
s in [kJ/(kg K)], v in [m^3/kg], T in [ºC]
M.J. Skovrup & H.J.H Knudsen. 16-12-11
Pressure [Bar]
Enthalpy [kJ/kg]