Meilleure note :

Moyenne :

Médiane :

Écart-type :

~1h15

CCP MP 23

Chaîne d'oscillateurs et onde mécanique

I. Oscillateur harmonique

$$E_p(x) = V(x) = V_0\left(1 - e^{-a(x-x_0)}\right)^2$$

1) La longueur de la liaison à l'équilibre correspond à 1 extremum d'énergie potentielle

$$\frac{dE_p}{dx}(x) = 2V_0\left(1 - e^{-a(x-x_0)}\right) . a\, e^{-a(x-x_0)}$$

$$\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0 \iff e^{-a(x_{eq}-x_0)} = 1$$

$$x_{eq} = x_0 .$$

Remarque : c'est un minimum $V(x) \geq 0$ or $V(x_{eq}) = 0$.

2) On pose $x = x_{eq} + \varepsilon$

$$V(\varepsilon) = V_0\left(1 - e^{-a\varepsilon}\right)^2$$

Pour $a\varepsilon \ll 1$

$$V(\varepsilon) \simeq V_0\left(1 - \left(1 - a\varepsilon + \frac{1}{2}a^2\varepsilon^2\right)\right)^2$$

$$V(\varepsilon) = V_0\, a^2 \varepsilon^2 \quad \text{à l'ordre 2.}$$

On a bien un puits parabolique

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \text{soit} \quad F_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$= -2V_0 a^2 \varepsilon$$

$$= -k\varepsilon$$

force de rappel élastique

avec $\boxed{k = 2V_0 a^2}$

3) 2^e loi de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$

ou $m\ddot{\varepsilon} = -k\varepsilon$

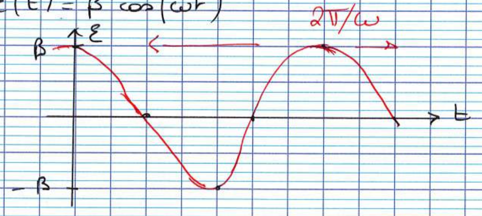
$\Leftrightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = 0$ on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

pulsation des oscillations

$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 \cos\omega t + \varepsilon_2 \sin\omega t$

avec $\varepsilon(0) = \varepsilon_1 = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = \omega\,\varepsilon_2 = 0$.

$\varepsilon(t) = \beta\cos(\omega t)$

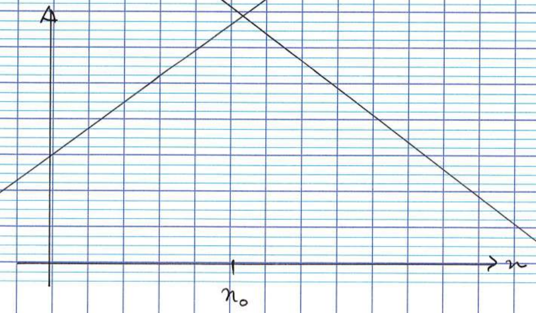


4) ~~Energie potentielle de Morse :~~

~~$V(x) = V_0\left(1 - e^{a(x-x_0)}\right)^2$~~

~~$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$~~

~~$= V_0 a^2 (x-x_0)^2$~~



II. Chaîne unidimensionnelle infinie d'OH.

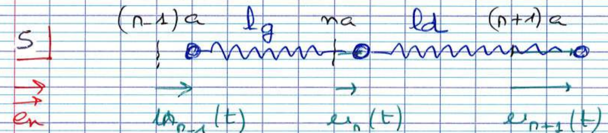
4) $t = 0$, la $n^{ième}$ masse est à l'équilibre

$x_n(0) = na$

$u_n(t) = x_n(t) - x_n(0)$

$= x_n(t) - na$

5)



la nième masse est soumise à

$\vec{F_g} = -k(l_g - b)\,\vec{e_x}$

et $\vec{F_d} = -k(l_d - b)(-\vec{e_x})$

avec $l_g = a + u_n(t) - u_{n-1}(t)$

et $l_d = a + u_{n+1}(t) - u_n(t)$ de plus $a = b$

D'après la 2^e loi de Newton $m\vec{a} = \vec{F_g} + \vec{F_d}$

$m\ddot{u}_n(t) = -k\left(u_n(t) - u_{n-1}(t)\right) + k\left(u_{n+1}(t) - u_n(t)\right)$

$\boxed{\ddot{u}_n(t) = \omega_0^2\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right)}$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $\alpha = 2$

6) $u_n(t) = U_0\, e^{i(\omega t - qna)}$

Cette onde est harmonique (terme en $e^{j\omega t}$)

U_0 = amplitude de l'onde
ω = pulsation de l'onde

20 **7)** On veut $u_p(t) = u_n(t)$

$\Leftrightarrow \quad U_0 e^{i(\omega t - qna)} = U_0 e^{i(\omega t - qpa)}$

soit $\quad e^{iqna} = e^{iqpa}$

$\Leftrightarrow \quad qpa = qna + 2k\pi$

Pour $k = 1 \qquad qpa = qna + 2\pi$

$$pa - na = \boxed{\frac{2\pi}{q} = d}$$

$d = (p-n)a = k'a \qquad q$ = norme du vecteur d'onde.

8) Relation de dispersion : on exploite $\ddot{u}_n = \omega_0^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$

$$-\omega^2 = \omega_0^2\left(e^{-iqa} + e^{+iqa} - 2\right)$$

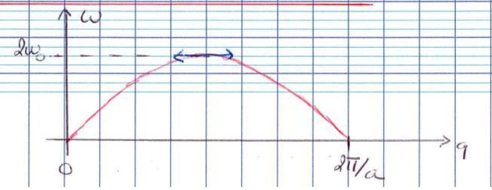
$$= \omega_0^2\left(2\cos qa - 2\right)$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2\left(1 - \cos qa\right)$$

or $\cos qa = 1 - 2\sin^2\frac{qa}{2}$

$$\boxed{\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{qa}{2}} \qquad \text{ok.}$$

⊕ graphe



26 **III Solide cristallin**

9) $V(x) = \dfrac{A}{x^{12}} - \dfrac{B}{x^6}$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, V = +\left(\underbrace{12\frac{A}{x^{13}}}_{\text{force répulsive entre nuages électroniques}} - \underbrace{6\frac{B}{x^7}}_{\text{force attractive (Van der Waals)}}\right)\vec{e}_x$$

29 **10)** $\dfrac{dV}{dx} = -12\dfrac{A}{x^{13}} + 6\dfrac{B}{x^7} = \dfrac{-12A + 6x^6B}{x^{13}}$

$\dfrac{dV}{dx}(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[6]{2\dfrac{A}{B}}$

$V(a) = -\Theta_0 = \dfrac{A}{4A^2}B^2 - \dfrac{B^2}{2A} = -\dfrac{B^2}{4A}$

$\Theta_0 = +\dfrac{B^2}{4A}$ et $a^6 = \dfrac{2A}{B}$

$$V(x) = \left(\frac{A}{x^{12}}\cdot\frac{a^{12}}{a^{12}} - B\,\frac{a^6}{x^6}\cdot a^6\right)$$

$$= \left(\frac{A}{4A^2}B^2\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - B\left(\frac{a}{x}\right)^6\cdot\cancel{2}\frac{B}{2\cancel{A}}\right)$$

$$= \frac{B^2}{4A}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\cancel{B}\left(\frac{a}{x}\right)^6\right)$$

Plus simple : On identifie les 2 expressions
$A = \Theta_0 a^{12}$
$B = 2\Theta_0 a^6$
$\rightarrow a^6 = \dfrac{2A}{B}$
or $\boxed{\Theta_0 = \dfrac{B}{2a^6}}$

$$\boxed{\Theta_0 = \frac{Ba^6}{2a^{12}} - \frac{B}{a^6} = \frac{B}{2a^6}}$$

36 **11)** Courbe 1 $\quad V(x)/\Theta_0 \quad$ vaut -1 pour $a/x = 1$.
Courbe 2 $\quad (a/x)^{12} \quad$ vaut 1 pour $a/x = 1$
Courbe 3 $\quad 2(a/x)^6 \quad$ décroit ⊖ vite, vaut 2 pour $a/x = 1$

Développement de Taylor à l'ordre 2

12) $V(a+\varepsilon) = V(a) + \frac{dV}{dx}(a)\,\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}(a)\,\varepsilon^2$

$$= -\phi_0 + 0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(-\frac{36\,B}{a^8}\right)$$

En effet $\frac{d^2V}{dx^2}(x) = +12\times 13\,\frac{A}{x^{14}} - 6\times 7\,\frac{B}{x^8}$

$\frac{d^2V}{dx^2}(a) = +6a^6B\,\frac{13}{a^{14}} - 6B\,\frac{7}{a^8}$

$= 6B\,\frac{6}{a^8} = \frac{36B}{a^8}$

$\Theta_0 = \frac{B}{2a^6} \rightarrow \frac{d^2V}{dx^2}(a) = 72\,\frac{\Theta_0}{a^2} = k$

On a bien un puits parabolique d'énergie potentielle

1.2

13) $\underline{k = 29\ \mathrm{N\,m^{-1}}}$

$\underline{\omega_0 = 1{,}7\ 10^{13}\ \mathrm{rad\,s^{-1}}}$

14) $u_n(t) = U_0\, e^{i(\omega t - qna)}$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ par définition

$= \frac{1}{2}m U_0^2\omega^2 \sin^2(\omega t - qna)$

$\langle E_c\rangle = \frac{1}{4} m U_0^2\omega^2$

Pour N atomes $\langle E_{c\,tot}\rangle = \frac{N}{4} m\,\omega^2 U_0^2$

15) $E_p = \frac{1}{2}k\,(u_{n+1}-u_n)^2 + \frac{1}{2}k\,(u_n - u_{n-1})^2$

On a

48

06 Soit $\langle E_p\rangle = \frac{1}{2}k\,\langle (u_{n+1}-u_n)^2\rangle + \frac{1}{2}k\,\langle (u_n - u_{n-1})^2\rangle$

Avec les notations complexes
$\underline{\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2}(x\,x^*) = \frac{1}{2}|x|^2}$

D'où la formule proposée

$\langle E_p\rangle = \frac{1}{4}k\left(|u_{n+1}-u_n|^2 + |u_{n-1}-u_n|^2\right)$

08 16) $u_n(t) = U_0\, e^{i(\omega t - qna)}$

Donc $u_{n+1}(t) - u_n(t) = U_0\, e^{i\omega t}\, e^{-iqna}\left(e^{-iqa} - 1\right)$

$= U_0\, e^{i(\omega t - qna)}\, e^{-i\frac{qa}{2}}\left(e^{-i\frac{qa}{2}} - e^{+i\frac{qa}{2}}\right)$

$= -2iU_0 \sin\left(\frac{qa}{2}\right) e^{i(\omega t - qna)}\, e^{-i\frac{qa}{2}}$

$|u_{n+1}(t) - u_n(t)|^2 = 4U_0^2\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)$

De même $|u_{n-1} - u_n|^2 = 4U_0^2\sin^2\frac{qa}{2}$

D'où $\boxed{\langle E_p\rangle = 2kU_0^2\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)}$

Or, d'après la relation de dispersion
$\sin^2\frac{qa}{2} = \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\boxed{\langle E_p\rangle = 2kU_0^2\,\frac{\omega^2}{4k}\,m = \frac{1}{2}mU_0^2\omega^2}$$

17) Par définition $U = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle}_{\text{par 1 atome}}$

soit $U = N \cdot \frac{1}{4} m\omega^2 U_0^2 + \frac{1}{2} N \frac{1}{2} m\omega^2 U_0^2$

↑ énergie potentielle entre 2 atomes successifs est comptée 2 fois

$$\boxed{U = \frac{1}{2} N m\omega^2 U_0^2}$$

17

15

IV - Du discret au continu

18) Relation de dispersion : $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{qa}{2}$

λ = longueur d'onde de l'onde

$\lambda = \frac{2\pi}{q}$ avec $\left|\sin \frac{qa}{2}\right| = \frac{\omega}{2\omega_0}$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi a}{2 \arcsin \frac{\omega}{2\omega_0}}}$$

AN : $\lambda = 6{,}8$ mm grand devant a

24

19) Passage au continu $u(x,t) = u_n(t)$

D'où $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 \Big(u(x+a,t) + u(x-a,t) - 2u(x,t) \Big)$

avec $u(x \mp a, t) = u(x,t) \mp a \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

On obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 \frac{a^2}{\cancel{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

28

$$\boxed{c = \omega_0 a}$$

AN : $c = 3{,}46^3\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Première partie

Vibrations transverses

I Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

1. Pour le tronçon $[x, x+\Delta x]$, le théorème de la résultante cinétique s'écrit

$$\mu \Delta x a e_y = \overrightarrow{F}(x+\Delta x, t) - \overrightarrow{F}(x,t)$$

où $a\overrightarrow{e_y}$ désigne l'accélération du centre de masse du tronçon ; en divisant par Δx, on obtient

$$\mu a \overrightarrow{e_y} = \frac{\overrightarrow{F}(x+\Delta x, t) - \overrightarrow{F}(x,t)}{\Delta x}$$

puis, en passant à la limite $\Delta x \to 0$:

$$\mu \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} \overrightarrow{e_y} = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial x}(x,t) \qquad (M)$$

En projetant (M) sur $\overrightarrow{e_x}$, on obtient

$$0 = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x,t)$$

soit, en intégrant :

$$F_x(x,t) = T$$

La tension étant tangente au fil, on a

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \text{ soit } F_y(x,t) = T \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}$$

2. En projetant (M) sur $\overrightarrow{e_y}$, on obtient

$$\mu \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x}(x,t)$$

Compte tenu de l'expression de F_y obtenue à la question précédente, on obtient l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}$$

La célérité des ondes est donc

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

3. $\partial h / \partial x$ est dérivable, donc continue en des points autres que A et B.

4. On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x,t) = Z \sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$$

En dérivant deux fois, on obtient

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = -Z\omega^2 \sin(kx+\phi)\cos(\omega t) \text{ et } \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} = -Zk^2 \sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$$

En substituant ces expressions dans l'équation de d'Alembert, on obtient

$$-Z\omega^2 \sin(kx+\phi)\cos(\omega t) = -Zk^2c^2 \sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$$

soit

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

5. La condition aux limites en A donne $\sin\phi = 0$; on peut choisir $\phi = 0$.

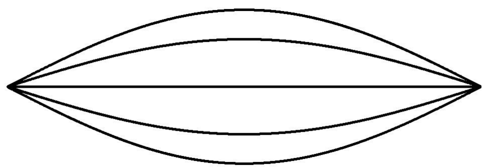
La condition aux limites en B s'écrit alors $\sin 2kL = 0$, ce qui impose

$$2kL \equiv 0 \quad [\pi] \qquad \text{soit} \qquad k_n = n\frac{\pi}{2L} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

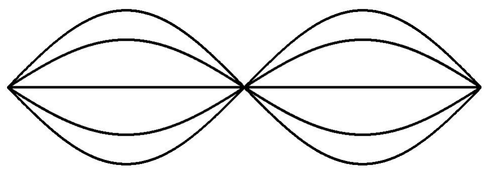
Les pulsations propres et fréquences propres correspondantes sont

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{2L} \qquad \text{et} \qquad f_n = n\frac{c}{4L} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

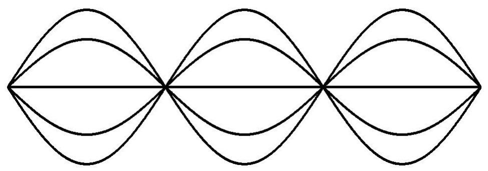
6. L'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental k_1 est représentée ci-dessous ; on observe un ventre et 2 noeuds.



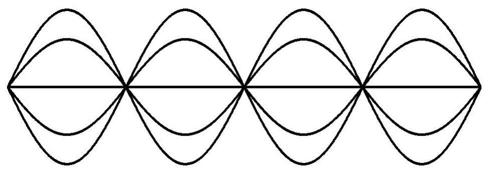
Pour le premier harmonique (mode k_2), on a 2 ventres et 3 noeuds.



Pour le second harmonique (mode k_3), on a 3 ventres et 4 noeuds.



Pour le troisième harmonique (mode k_4), on a 4 ventres et 5 noeuds.



7. On peut montrer que l'énergie mécanique par unité de longueur $e(x,t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$$

Pour le mode de vibration fondamental, on a, en explicitant k_1 et ω_1 :

$$h = Z\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{2L}\right)$$

soit, en dérivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -Z\left(\frac{\pi c}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi ct}{2L}\right)$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial z} = Z\left(\frac{\pi}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{2L}\right)$$

On en déduit

$$\langle\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\rangle = \frac{1}{2}Z^2\left(\frac{\pi c}{2L}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

et

$$\langle\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\rangle = \frac{1}{2}Z^2\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

soit

$$\langle e(x,t)\rangle = \frac{\mu}{4}Z^2\left(\frac{\pi c}{2L}\right)^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right] = \frac{\mu}{4}Z^2\left(\frac{\pi c}{2L}\right)^2$$

8. L'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental est

$$E_1 = \int_0^{2L}\langle e(x,t)\rangle dt = \frac{\mu L}{2}Z^2\left(\frac{\pi c}{2L}\right)^2 = \frac{\pi^2 T Z^2}{8L}$$

Application numérique : Lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100$ N, l'amplitude des oscillations est $Z \simeq 3$ cm.

I.1 Perturbation par une masse

9. Les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse m sont ceux qui correspondent à un ventre en $x = L$.

Les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse sont ceux qui correspondent à un noeud en $x = L$.

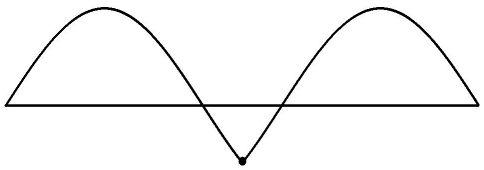
10. En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ ne sont pas nécessairement égales (la dérivée $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est discontinue en L). La composante transversale de la tension est alors discontinue ; la masse m est soumise aux forces verticales

$$T_y^+ = T\frac{\partial h}{\partial x}(L^+,t) \quad \text{et} \quad T_y^- = T\frac{\partial h}{\partial x}(L^-,t)$$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit alors

$$m\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L,t) = T\left(\frac{\partial h}{\partial x}(L^+,t) - \frac{\partial h}{\partial x}(L^-,t)\right) \qquad (m)$$

La corde présente un point anguleux en $x = L$, comme le montre le schéma ci-dessous.



11. On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à L, c'est-à-dire telle que $h(x,t) = h(2L-x,t)$, et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \leq x < L$ par :

$$h(x,t) = H\sin(Kx)\cos(\omega t)$$

On a alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}(L^+,t) - \frac{\partial h}{\partial x}(L^-,t) = -2\frac{\partial h}{\partial x}(L^-,t) = -2KH\cos(KL)\cos(\omega t)$$

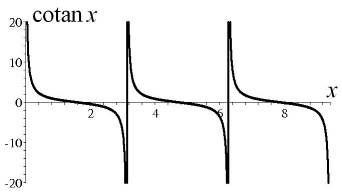
La condition aux limites (m) en $x = L$ s'écrit alors

$$-m\omega^2 H\sin(KL)\cos(\omega t) = -2KTH\cos(KL)\cos(\omega t)$$

soit

$$\text{cotan}(KL) = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

12. La courbe représentative de $\text{cotan}(x)$ sur l'intervalle $]0, 3\pi[$ est représentée ci-dessous



Si la masse m est nulle, l'équation se réduit à $\text{cotan}(KL) = 0$ soit

$$KL \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\Pi]$$

on retrouve comme cas particulier

$$KL = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad K = \frac{\pi}{2L} = k_1$$

ce qui est le vecteur d'onde k_1 du mode fondamental de la corde homogène.

13. Lorsque m est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en m du vecteur inconnu K : $K \simeq k_1 + \beta m$; on peut alors écrire

$$\text{cotan}(KL) \simeq \text{cotan}(k_1 L + \beta m L) = \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + \beta m L\right) \simeq -\beta m L$$

et

$$\frac{m\omega^2}{2KT} \simeq \frac{m\omega_1^2}{2k_1 T} = \frac{m k_1^2 c^2}{2k_1 T} = \frac{m k_1 T}{2T\mu} = \frac{m\pi}{4\mu L}$$

La condition aux limites en $x = L$ donne alors

$$-\beta m L = \frac{m\pi}{4\mu L} \quad \text{soit} \quad \beta = -\frac{\pi}{4\mu L^2}$$

K est donc plus petit que k_1.

14. La fréquence est proportionnelle au vecteur d'onde ; le changement relatif de fréquence $\Delta f_1/f_1$ est donc

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{K - k_1}{k_1} = \frac{\beta m}{k_1} = -\frac{\pi \times 2L}{4\mu L^2 \pi} = -\frac{m}{2\mu L}$$

Application numérique : Pour $L = 1$ m, $T = 100$ N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m^{-1}, on obtient $\Delta f_1 = -1$ Hz. On en déduit la masse

$$m = -2\mu L\frac{\Delta f_1}{f_1} \quad \text{avec} \quad f_1 = \frac{c}{4L} = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

soit

$$m = -8\mu L^2\sqrt{\frac{\mu}{T}}\Delta f_1 = 0,8 \text{ g}$$

CCS-41-18

Ondes acoustiques sous-marines

I. Ondes acoustiques dans l'eau

Q1 L'autre relation entre ρ et $\vec{v}$ est la conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

Q2 et Q3 On a $\rho = \rho_0 (1 + \chi p_a)$

$P = P_s(z) + p_a$

Conservation de la masse : $\rho_0 \chi \dfrac{\partial p_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \vec{v}) = 0$

à l'ordre 1.

Soit $\boxed{\dfrac{\partial p_a}{\partial t} + \dfrac{1}{\chi} \operatorname{div} \vec{v} = 0}$

Navier Stokes

$$\rho_0(1+\chi p_a)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0(1+\chi p_a)\underbrace{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{\text{ordre 2}}$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \underbrace{\vec{0}}_{\text{écoulement parfait}} + \rho \vec{g}$$

A l'ordre 1 : $\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_s(z)) - \overrightarrow{\text{grad}}\, p_A + \rho\vec{g}$

avec, pour le fluide au repos $\boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}\, P_s + \rho\vec{g} = \vec{0}}$

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_A}$$

Q4 On a donc $\chi \dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{v}) = 0$

Or $\dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{v}) = \operatorname{div}\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$

$= \operatorname{div}\left(-\dfrac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\text{grad}}\, p_A\right)$

$= -\dfrac{1}{\rho_0}\Delta p_A$ $\quad (\Delta p_a = \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, p_a))$

On obtient : $\boxed{\dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\chi \rho_0}\Delta p_a}$

Equation de propagation de la surpression acoustique

ou $\Delta p_a = \chi \rho_0 \dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$

$= \dfrac{1}{c_a^2}\dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$ avec $\boxed{c_a = \dfrac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}}}$

Q5 Pour une onde sinusoïdale de pulsation ω

$p_a(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) \cos(\omega t - \phi(\vec{r}))$

retard de phase en $\vec{r}$

Alors $\dfrac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = -\omega^2 p_a(\vec{r}, t)$

On obtient $\boxed{\Delta p_a + \dfrac{\omega^2}{c_a^2} p_a = 0}$

OPPS acoustique selon $\vec{e}_x$

Q5 $p_a(\vec{r},t)$ est de la forme :

$$p_a(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - k\,\vec{e}_x\cdot\vec{OM} + \varphi)$$

avec $\vec{e}_x\cdot\vec{OM} = x$

$$\boxed{p_a(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

De plus

$$\Delta p_a = \frac{\omega^2}{c_a^2}p_a \rightarrow -k^2 = -\frac{\omega^2}{c_a^2} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{c_a}}$$

Or a

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_A = -\frac{dp_A}{dx}\vec{e}_x = -kA\sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{e}_x$$

Soit

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{kA}{\rho_0}\sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{e}_x$$

$$\vec{v}(x,t) = \frac{kA}{\rho_0\omega}\cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{e}_x + \underbrace{\vec{B}(t)}_{=\vec{0}\ \text{car onde}}$$

$$= \frac{1}{\rho_0 c_A}p_A(x,t)\vec{e}_x$$

$$\boxed{\vec{v}(x,t) = \frac{p_A}{Z_a}\vec{e}_x}$$

avec $\boxed{Z_a = \rho_0 c_a}$

Q8 Onde sphérique divergente

$$p_a(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t)$$

On peut écrire $\vec{v}(r,t) = \frac{p_a(r,t)}{Z_a}\vec{e}_r$ en champ lointain pour $kr \gg 1 \Leftrightarrow r \gg \lambda_a$

Q9 Le vecteur densité de courant d'énergie acoustique est $\vec{\Pi}_a(r,t) = p_a(r,t)\,\vec{v}(r,t)$

$$= \frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)\frac{A}{r\rho_0 c_a}\cos(kr-\omega t)\vec{e}_r$$

$$= \frac{1}{\rho_0 c_a}\frac{A^2}{r^2}\cos^2(kr-\omega t)\vec{e}_r$$

$$\langle\vec{\Pi}_a\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0 c_a}\frac{A^2}{r^2}\vec{e}_r$$

or $|\underline{p}_A| = \frac{A}{r}$

$$\langle\vec{\Pi}_a\rangle = \frac{|\underline{p}_A|^2}{2\rho_0 c_A}\vec{e}_r = I_a\vec{e}_r$$

et $d\mathcal{P} = \langle\vec{\Pi}_a\rangle\cdot d\vec{S}$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{dS} = I_a\,\vec{n}\cdot\vec{e}_r} \quad \text{avec} \quad \boxed{I_a = \frac{|\underline{p}_a|^2}{2\rho_0 c_a}}$$

Q10

$$\mathcal{P} = 10\log\left(\frac{I_a(r_0)}{I_a(r)}\right)$$

$$= 20\log\frac{r}{r_0} + \alpha(r - r_0)$$

$$\underline{p}_a(r,t) = \frac{A}{r}\exp(i(\underline{k}r - \omega t)) \quad \text{avec } \underline{k} = k' + ik''$$

$$p_A(r,t) = \frac{A}{r}\exp\left(i(k'r-\omega t)\right)\exp\left(k''r\right)$$

$$|p_A|^2 = \frac{A^2}{r^2}\exp(-2k''r)$$

$$P = 10\log\left(\frac{e^{-2k''r_0}}{r_0^2}\frac{r^2}{e^{-2k''r}}\right)$$

$$= 20\log\frac{r}{r_0} - 20k''(r_0-r)\cdot\frac{1}{\ln 10}$$

$$\boxed{P = 20\log\frac{r}{r_0} + \alpha(r-r_0)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = \frac{20k''}{\ln 10}}$$

Q11 $k' = \frac{\omega}{c_a}$ $\qquad k'' = -\frac{k'^2 \ell}{2\rho_0 c_A}$

AN : $k''_{3kHz} = 8{,}00\cdot 10^{-8}\ m^{-1}$
$\rightarrow d = 6{,}4\cdot 10^6\ m.$ $\qquad d \simeq 1/2k''$

$k''_{30kHz} = 8{,}00\cdot 10^{-6}\ m^{-1}$
$d = 63\ km.$

Q7 On a $p_a(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)$

avec $\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, p_a$

$$= -\frac{\partial p_a}{\partial r}\vec{e_r}$$

Soit $\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\left[-\frac{A}{r^2}\cos(kr-\omega t) - \frac{Ak}{r}\sin(kr-\omega t)\right]\vec{e_r}$

$$\vec{v}(r,t) = \frac{A}{\rho_0 r}\left[-\frac{1}{r\omega}\sin(kr-\omega t) + \frac{k}{\omega}\cos(kr-\omega t)\right]\vec{e_r} + \underbrace{\vec{f}(\vec{r})}_{=\vec{0}\ \text{onde}}$$

$$\boxed{\vec{v}(r,t) = \frac{A}{\rho_0 c_a r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\vec{e_r}}$$

25 II Rayons acoustiques

Q12 $p_a(\vec{r},t) = B\, e^{i(k_0 \mathcal{L}(\vec{r}) - \omega t)}$

sans dimension

avec $k_0 = \dfrac{\omega}{c_{a0}}$ $\quad [k_0] = \dfrac{[\omega]}{[c_{a0}]} = \dfrac{T^{-1}}{L\,T^{-1}} = L^{-1}$

$[\mathcal{L}(\vec{r})] = L$

L'analogue optique de $\mathcal{L}(\vec{r})$ est le chemin optique

Q13 On a $(\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{L})^2 + \dfrac{i}{k_0}\Delta\mathcal{L} = n^2(\vec{r})$

Si $\lambda \ll L$ $\quad L$ = longueur caractéristique de variation de $\mathcal{L}$.

Ordre de grandeur :

$(\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{L})^2 \simeq \dfrac{\mathcal{L}^2}{L^2}$

$\dfrac{i}{k_0}\Delta\mathcal{L} \simeq \lambda . \dfrac{\mathcal{L}}{L^2}$ $\quad$ avec $\lambda \ll L$.

donc on néglige $\dfrac{i}{k_0}\Delta\mathcal{L}$ devant $(\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{L})^2$

On obtient $\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{L}^2 = n^2(\vec{r})$

et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{L} = n(\vec{r})\,\vec{u}$ $\quad$ avec $\|\vec{u}\| = 1$

On néglige la diffraction acoustique

Q14 On a $\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{L} = n(\vec{r})\,\vec{u}$

Soit $\vec{dl}$ un déplacement élémentaire sur une surface d'égal chemin acoustique

$\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{L}).\vec{dl} = d\mathcal{L} = 0$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{L}) = n(\vec{r})\,\vec{u}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}.\vec{dl} = 0$

les rayons acoustiques sont $\perp$ aux surfaces d'égal chemin optique

Cela correspond au théorème de Malus en optique

Q15 On a $c(z) = c_{a0}(1 + \Omega z)$

avec $c(z) = \dfrac{c_{a0}}{n(z)}$ $\quad$ d'où $\quad n(z) = \dfrac{1}{1+\Omega z}$

D'autre part, on a $n(z)\sin\theta(z) = \text{cste}$

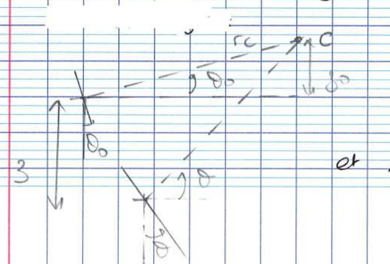
Quand $z \uparrow$ $\theta \uparrow$ donc $n(z) \downarrow$

$\Rightarrow \Omega > 0$.

la remontée finale est due à la réflexion totale

Q16 On a $\dfrac{\sin\theta(z)}{1+\Omega z} = \sin\theta_0$

47/57



Or a $\sin\theta_0 = \dfrac{z_0}{r_c}$

et $\sin\theta = \dfrac{z_0 + z}{r_c}$

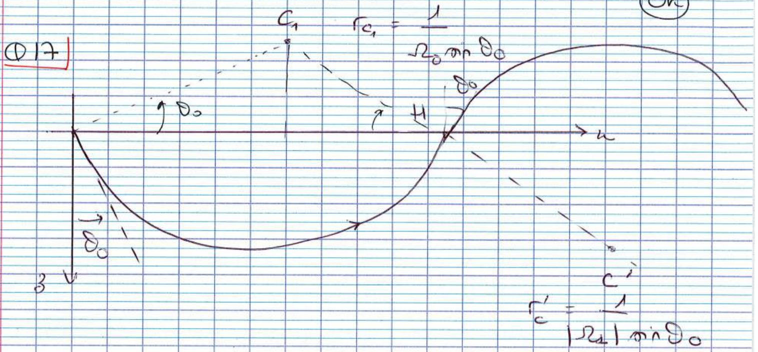
avec $\sin\theta = \sin\theta_0 \,(1 + \Omega z)$

D'où $\sin\theta_0 \,(1+\Omega z) = \sin\theta_0 + \dfrac{z}{r_c}$

$\sin\theta_0 \,\Omega z = \dfrac{z}{r_c}$ $\qquad \underline{r_c \,\Omega \sin\theta_0 = 1}$

OK

58/02 Q17



Suite de demi cercles

L'analogue en optique est la fibre à gradient d'indice.

06 Q18 δt_0 = durée de propagation entre S et H

$$\delta t_0 = \int_S^H dt = \int \frac{dl}{c_{a0}}\, n(z)$$

$$= 2\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{r_c\, d\theta}{c_{a0}\,(1+\Omega_0 z)}$$

avec $(1+\Omega_0 z) = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta_0}$

$$\delta t_0 = \frac{2r_c}{c_{a0}\sin\theta_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2r_c}{c_{a0}} \sin\theta_0 \left[\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\theta_0}^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2r_c}{c_{a0}} \sin\theta_0 \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta t_0 = \frac{-2}{\Omega_0 c_{a0}} \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

Q19 $\Delta t = \sum (\delta t_0 + \delta t_1)$

avec $\delta t_1 = + \dfrac{2}{\Omega_1 c_{a0}} \ln\left(\tan\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)\right)$

$$\Delta x = k\,(2r_{c_0}\cos\theta_0 + 2r_{c_1}\cos\theta_0)$$

$$= 2k \left(\frac{\cos\theta_0}{\Omega_0 \sin\theta_0} - \frac{\cos\theta_0}{\Omega_1 \sin\theta_0}\right)$$

$$= \frac{2k}{\tan\theta_0} \left(\frac{1}{\Omega_0} - \frac{1}{\Omega_1}\right)$$

$$\Delta t = k\,(\delta t_0 + \delta t_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_0 \,\Delta x}{2} \; \frac{\Omega_0 \Omega_1}{-\Omega_0 + \Omega_1} \left(-\frac{2}{\Omega_0 c_{a0}} \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{2}{\Omega_1 c_{a0}} \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$\Delta t = \Delta x \cdot \frac{1}{c a_0} \tan\theta_0 \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right) \frac{\Omega_0 \Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_0} \times \left(-\frac{1}{\Omega_0} + \frac{1}{\Omega_1}\right)$$

$$\boxed{\Delta t = -\Delta x \frac{1}{c a_0} \tan\theta_0 \ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

Ok