# Partie B – Diffusion thermique

## I - Le programme

| **Domaines numériques** | **Capacités exigibles** |
|---|---|
| 1. Tableaux | |
| Tableaux à une ou deux dimensions. | Choisir une structure de données appropriée à la modélisation d'un problème physique.<br>Réaliser des opérations algébriques simples sur des tableaux.<br>Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque numpy (leurs spécifications étant fournies) pour manipuler des tableaux. |
| 2. Équations différentielles et équations aux dérivées partielles | |
| Équation de diffusion à une dimension. | Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable. |

| **Contenu thématique** | **Capacité numérique** |
|---|---|
| Équation de la diffusion thermique. | Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.. |

## II - Les outils python

### 1 - Les bibliothèques à importer

- numpy
  pour créer des tableaux.
- matplotlib.pyplot
  pour les représentations graphiques.

### 2 - Les commandes utiles

Création de tableaux :
- À partir d'une liste. **np.array(**[**liste**]**)** : crée un tableau à partir d'une liste.
- À partir d'un intervalle et d'un nombre d'éléments. **np.linspace(start, end, nbre)** : génère $n$ valeurs entre start et end.
- À partir d'un intervalle et d'un pas. **np.arange(start, end, pas)** : génère des valeurs entre start et end (exclus) espacées du pas.
- Tableau de zéros : **np.zeros(dim)** crée un tableau de 0 de dimension dim.

Boucle **for** avec la fonction **range()** :
La fonction range() permet de générer une liste de parcours.
**range(n)** renvoie un itérateur de 0 à n-1.
**range(a,b)** renvoie un itérateur avec $a$ comme premier entier et b-1 comme dernier entier.
**range(a,b,pas)** renvoie un l'entier $a$ puis des les entiers avec un intervalle $pas$ jusqu'à $b$ exclus.

Pour tracer des courbes :
plt.plot(x,y) pour créer le graphique
plt.show() pour afficher le graphique

# III - Problème étudié

## 1 - Équation de diffusion

Nous étudions la diffusion thermique dans un barreau droit de section $S$ et de longueur $L$. En l'absence de terme de source, l'équation de diffusion thermique dans le barreau a pour expression :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

où $T(M,t) = T(x,t)$ est le champ de température du barreau et $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ coefficient de diffusivité thermique.

## 2 - Les conditions aux limites

On envisagera trois types de conditions aux limites aux extrémités du domaine d'étude $0 \leq x \leq L$ :

- condition "type Dirichlet" ou contact thermique parfait :
  La valeur de $T$ est imposée à une ou aux deux des extrémités du domaine :
  $$T(0,t) = T_0(t) \text{ et/ou } T(L,t) = T_L(t)$$
  C'est le cas, par exemple, d'une barre en contact avec deux thermostats;

- condition "de Neumann" ou condition de flux :
  Le flux thermique est imposé à une ou aux deux extrémités du domaine :
  $$\Phi_0(t) = -\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$$

- condition mixte issue de la loi de Newton :
  À l'interface solide-fluide (par exemple en $x = L$) il y a continuité du flux :
  $$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = h(T(L,t) - T_{\text{air}})$$

## 3 - Discrétisation

On passe du modèle continu au modèle discret (passage opposé à celui effectué lors de la marche aléatoire à l'échelle microscopique).

Discrétisation spatiale : On divise le solide de longueur $L$ en $N$ domaines de longueur $\Delta x = \dfrac{L}{N}$. On va donc chercher les températures aux positions $x_i = i\Delta x$ avec $i \in [0, 1, ..., N-1, N]$.

Discrétisation temporelle : on divise le temps en ”pas de temps” : $\Delta t$. Si on souhaite étudier la diffusion sur une durée $t_{\max} = M\Delta t$, on va l'étudier aux instants $t_k$ tels que $t_k = k\Delta t$ avec $k \in [0, 1, ..., \frac{t_{\max}}{\Delta t} = M]$.

On passe de la fonction continue $T(x,t)$ pour $x \in [0, L]$ et $t \in [0, t_{\max}]$ à un ensemble de valeurs discrètes $T_{i,k}$ avec $i \in [0, ..., N]$ et $k \in [0, ..., M]$ telles que $T(x_i, t_k) = T_{i,k}$.

# IV - Méthode des différences finies

## 1 - Approximation des dérivées par des différences finies

On discrétise l'équation de diffusion : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

Pour le premier terme :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{T(x, t+\mathrm{d}t) - T(x,t)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$$

Finalement, nous pouvons remplacer $\dfrac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_k)$ par $\dfrac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t}$.

Pour le second terme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right) \simeq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(x+\Delta x, t) - T(x,t)}{\Delta x}\right) \simeq \frac{\dfrac{T(x+\Delta x, t) - T(x,t)}{\Delta x} - \dfrac{T(x,t) - T(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \simeq \frac{T(x+\Delta x, t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Nous pouvons remplacer $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_k)$ par $\dfrac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}}{(\Delta x)^2}$.

On obtient donc :

$$\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t} = D\frac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}}{(\Delta x)^2}$$

Connaissant les températures à l'instant $t_k$ (l'ensemble des $T_{i,k}$ pour $i$ entre 0 et $N$) on peut en déduire les températures à $t_{k+1}$ par :

$$T_{i,k+1} = T_{i,k} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}\right)$$

Remarque 1 : il faut faire attention aux conditions aux limites ($i = 0$ et $i = N$).

Remarque 2 : Ce schéma n'est stable que si $\dfrac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

## 2 - Prise en compte des conditions aux limites

Le schéma précédent permet de calculer les températures $T_{i,k}$ pour $1 \leq i \leq N-1$ autrement dit toutes les températures à l'exception des bords ($i = 0$ et $i = N$).

### a) Condition de type Dirichlet

C'est la situation du contact thermique parfait, la température est fixée à l'une des extrémités (ou aux deux) : $T(0 \text{ ou } L, t) = T_{lim}(t)$. On aura donc $T_{0,k} = T_{lim0,k}$ et/ou $T_{L,k} = T_{limL,k}$ pour tout $k$.

### b) Condition de type Neumann

Dans cette situation, c'est le flux thermique qui est fixé : $\Phi(t)$, on a alors $\dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = -\dfrac{1}{\lambda S}\Phi_0(t)$.

On admet que cela se traduit par :

$$T_{0,k+1} = T_{0,k} + 2\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[T_{1,k} - T_{0,k} + \frac{\Delta x}{\lambda S}\Phi_0(t_k)\right]$$

## V - Application aux barreau droit isolé latéralement

Un étudie la diffusion thermique le long d'un barreau droit cylindrique de rayon $a = 7,5$ mm, de longueur $L = 50$ cm. Ce barreau est constitué de fer.

Données :
- conductivité thermique du fer $\lambda \simeq 50$ W.m$^{-1}$.K$^{-1}$,
- coefficient de transfert conducto-convectif $h \simeq 10$ W.m$^{-2}$.K$^{-1}$,
- masse volumique du fer $\mu = 7,86.10^3$ kg.m$^{-3}$,
- capacité thermique massique du fer $c = 444$ J.K$^{-1}$.kg$^{-1}$.

Calculer $D$ diffusivité thermique du fer.

### 1 - Barreau isolé latéralement avec deux thermostats aux extrémités

On étudie le régime transitoire d'un barreau, au départ à la température $T_0 = 20$°C qui est mis en contact à $t = 0$ avec un thermostat à la température $T_0$ en $x = 0$ et $T_1 = 80$°C en $x = L$.

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial d$x$. On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

**Q1.** Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de d$x$ en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse $x_i$ du (i)-ème point.
**Q2.** À l'aide de la formule de Taylor-Young, équation (1), exprimer :
a. $T(t + \mathrm{d}t, x)$, au premier ordre par rapport à $t$, d$t$ étant l'incrément temporel ;
b. $T(t, x - \mathrm{d}x)$, au second ordre par rapport à $x$ ;
c. $T(t, x + \mathrm{d}x)$, au second ordre par rapport à $x$.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

**Q3.** En déduire une expression de $\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ en fonction de d$x$, $T(x,t)$, $T(t, x - \mathrm{d}x)$ et $T(t, x + \mathrm{d}x)$.

La température à l'abscisse $x_i$ à une date $t_n$ sera notée : $T_i^n$.

**Q4.** En reformulant le résultat des questions précédentes, déterminer une relation entre :

a. $T_i^{n+1}$, $T_i^n$, $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ et d$t$ ;
b. $T_{i+1}^n$, $T_{i-1}^n$, $T_i^n$, $\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ et d$x$.

**Q5.** À partir de l'équation de diffusion et Q4, montrer que :

$$T_i^{n+1} = \mathrm{d}t \cdot D \left( \frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes (sur machine !).

**Q6.** Donner l'Instruction 1 permettant de définir la diffusivité thermique $D$.

**Q7.** L'équation de Q5. est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \ldots N_X\}$ ?

**Q8.** Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les Instruction 2.1 et Instruction 2.2. $N_t$ intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0; t_{max}]$.

**Q9.** Déduire des conditions aux limites les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.

**Q10.** À partir de la question Q5., compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

Tracer le champ des températures dans le barreau toutes les 100 s jusqu'au régime permanent.

## 2 - Barreau isolé latéralement avec flux fixes aux extrémités

Dans l'expérience du TP, la cellule Peltier génère un flux constant $\Phi_0 = 2,0$ W. Reprendre la démarche précédente avec cette nouvelle condition aux limites.