Partie C – Diffusion 1DD

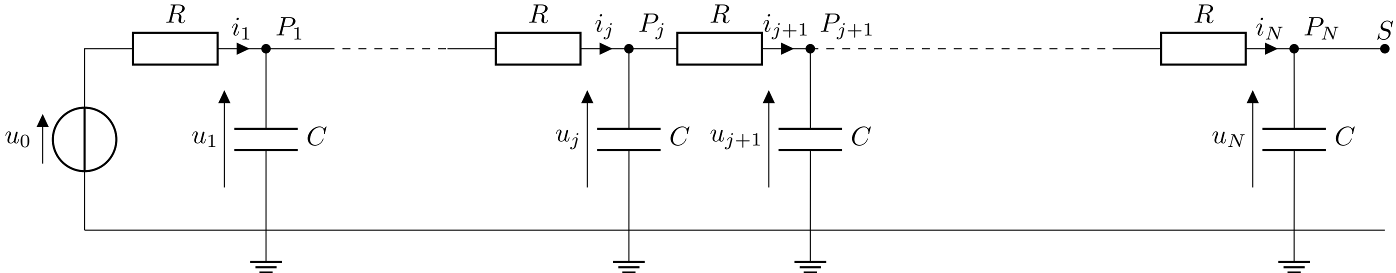
Le phénomène de diffusion est très présent dans le domaine des transferts de particules au sein de la matière et, surtout, dans le domaine des transferts thermiques. Nous allons utiliser un montage électrique qui simule une situation de diffusion unidimensionnelle à l'aide de composants électriques simples puisque nous allons utiliser uniquement des résistances et des condensateurs.

I- Modélisation de la diffusion 1DD

Dans ce TP, nous allons chercher à caractériser l'évolution d'une tension électrique dans l'ensemble de 20 cellules RC successives placées sur la plaquette mise à votre disposition. Nous étudierons la réponse de la ligne de cellules RC lorsque le générateur de début de ligne fournit une tension continue U_0 d'une part et lorsqu'il alimente la ligne avec une tension sinusoïdale de la forme $u_0(t) = U_{0m}\cos(\omega t)$ en supposant que le régime sinusoïdal est installé. Nous observerons aussi la propagation d'une impulsion dans la ligne de cellules.

1 - Le dispositif

Le montage est constitué de vingt cellules RC de type filtre passe-bas qui se succèdent, régulièrement espacées avec $R = 1,0$ kΩ et $C = 100$ nF, et numérotées de $j = 1$ à $j = N = 20$. L'ensemble est implanté sur une plaquette. Soit τ le temps caractéristique associé à chaque cellule : $\tau = RC$. On appelle a la dimension spatiale d'une cellule RC.



✘ Mesurez sur la plaquette la valeur de a : $a =$ ....

2 - Mise en équations - Durée ≃ 30 mn

✍ En appliquant la loi des mailles aux cellules j et $j+1$ et la loi des nœuds en P_j, déterminer une relation entre u_{j-1}, u_j, u_{j+1} et $\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}$.

On effectue l'approximation des milieux continus en considérant que pour une abscisse x à l'instant t on a la tension $u(x,t)$ avec $u(x = x_j, t) = u_j(t)$.

✍ Montrer que la tension $u(x,t)$ vérifie l'équation de diffusion 1DD :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec $D = \frac{a^2}{\tau}$.

II- Étude du régime stationnaire

1 - Aspect théorique - Durée $\simeq$ 10 mn

✍ On applique une tension continue $U_0 = 6,0$ V à l'entrée du dispositif. Que valent les tensions U_j lorsque la sortie est ouverte en régime permanent ?

✍ On court-circuite la sortie (S est reliée à la masse du circuit par un fil). Quelle est la situation analogue pour la diffusion thermique ou la diffusion de particules ?

✍ Déterminer l'expression des tensions U_j.

2 - Étude expérimentale - Durée $\simeq$ 15 mn

✍ Élaborer un protocole pour vérifier les prévisions théoriques sur les valeurs des tensions U_j.

✘ Présenter votre protocole à l'enseignant pour validation, puis le mettre en œuvre.

✘ Valider (ou non) le modèle.

✘ À l'aide de la fonction ampèremètre, mesurer l'intensité du courant délivré par le générateur. En déduire la résistance d'entrée de ce montage. Pouvait-on s'y attendre ?

III- Étude du régime sinusoïdal

Dans cette partie on applique une tension sinusoïdal en entrée ($u_0(t) = U_{0m}\cos(\omega t)$), la sortie n'est plus court-circuité (sortie ouverte).

Quelle est la situation analogue en diffusion thermique ?

1 - Aspect théorique - Durée $\simeq$ 30 mn

On repart de l'équation de diffusion en milieu continu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et on s'intéresse à la réponse de notre système à un forçage sinusoïdal. Nous exploitons donc les notations complexes en séparant les variables. Nous cherchons des solutions sous la forme $\underline{u}(x,t) = \underline{f}(x)\exp(i\omega t)$.

✍ Montrer que la tension $u(x,t)$ est donnée par l'expression :

$$u(x,t) = \underbrace{U_{0m}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}}_{\text{amplitude}}\underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}_{\text{propagation}}$$

avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}} = \sqrt{\dfrac{D}{\pi f}}$.

✍ En repassant au modèle discret, déterminer l'expression de $u_j(t)$ en fonction de j, a, δ, U_{0m} et ω.

✍ En déduire l'expression de $\ln\left(\dfrac{U_{m0}}{U_{jm}}\right)$, où U_{jm} est l'amplitude du signal sinusoïdal en P_j, en fonction de a, δ et j.

2 - Réalisation expérimentale - Durée $\simeq$ 15 mn

✘ On applique une tension sinusoïdale d'amplitude $6,0$ V et de fréquence $f = 900$ Hz en entrée. La sortie est ouverte.

✘ Observer, à l'oscilloscope, le signal d'entrée et, rapidement, l'évolution du signal en fonction de j.

✘ Pour $j \in [1;10]$ mesurer l'amplitude du signal ainsi que son retard de phase (ou retard temporel).

En déduire (de deux manières) la valeur expérimentale de $\dfrac{a}{\delta}$ et la comparer à la valeur théorique.

✍ Conclusion.

IV- Pour se faire plaisir : réponse à un échelon de tension et à une impulsion

1 - Régime transitoire : réponse à un échelon de tension

On applique en entrée une tension créneau entre 0 et 10 V à très basse fréquence (de l'ordre de quelques hertz). La sortie est ouverte.
À quelle situation physique cela correspond-il en diffusion thermique ?

✘ Observer les tensions $u_j(t)$ pour différentes valeurs de j. Que constatez-vous ?

✘ Déterminer l'ordre de grandeur du régime transitoire.

2 - Réponse à une impulsion : propagation d'un paquet d'ondes

✘ À l'aide du GBF, en mode créneau, avec la fonction "varduty", créer une impulsion.

✘ Observer la déformation de l'impulsion lors de la propagation, la commenter.

✘ Pour les 5/2 : estimer la valeur la vitesse de groupe du paquet d'onde.