

Paquet d'ondes

I - Le programme

Contenu thématique	Capacité numérique
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	À l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement..

II - Les outils python

1 - Les bibliothèques à importer

- numpy
Pour créer des tableaux.
- matplotlib.pyplot
pour les représentations graphiques

2 - Les commandes utiles

Création de tableaux :

- À partir d'une liste. **np.array([liste])** : crée un tableau à partir d'une liste.
- À partir d'un intervalle et d'un nombre d'éléments. **np.linspace(start, end, nbre)** : génère n valeurs entre start et end.
- À partir d'un intervalle et d'un pas. **np.arange(start, end, pas)** : génère des valeurs entre start et end (exclus) espacées du pas.
- Tableau de zéros : **np.zeros(dim)** crée un tableau de 0 de dimension dim.
- Tableau de uns : **np.ones(dim)** crée un tableau de 1 de dimension dim.

Boucle **for** avec la fonction **range()** :

La fonction range() permet de générer une liste de parcours.

range(n) renvoie un itérateur de 0 à $n-1$.

range(a,b) renvoie un itérateur avec a comme premier entier et $b - 1$ comme dernier entier.

range(a,b,pas) renvoie l'entier a puis des entiers avec un intervalle pas jusqu'à b exclus.

Pour tracer des courbes :

plt.plot(x,y) pour créer le graphique

plt.show() pour afficher le graphique

III - Représentations temporelle et spectrale d'un signal

1 - Transformation de Fourier

Transformée de Fourier : On définit la transformée de Fourier d'un signal temporel $f(t)$ par

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Théorème d'inversion : On montre que le signal temporel peut être reconstitué à partir de sa transformée de Fourier par

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{+j\omega t} d\omega.$$

Ceci signifie donc que $f(t)$ peut être considéré comme une superposition d'une infinité de fonctions sinusoïdales.

Spectre : Le spectre est continu ; il est décrit par la fonction $\omega \rightarrow |\hat{f}(\omega)|$.

Si f est réelle, alors $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$ et on peut écrire :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} 2 \cdot |\hat{f}(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

avec $\varphi(\omega) = \arg(\hat{f}(\omega))$.

2 - Construction d'un signal par superposition de signaux sinusoïdaux

On considère un signal s dont le spectre prend des valeurs non négligeables sur un intervalle de pulsations $\Delta\omega$ centré sur ω_0 .

On a alors :

$$s(t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} S(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

avec $S(\omega) = 2|\hat{s}(\omega)|$.

Nous allons approcher ce signal par une somme discrète de N signaux sinusoïdaux équi-répartis :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} S(\omega_i) \cos(\omega_i t)$$

avec $\omega_i = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} + i \delta\omega$ et $\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{N-1}$.

Par la suite, nous allons considérer trois formes de spectres simples :

- un spectre rectangulaire pour lequel $S(\omega) = \frac{1}{N}$ pour $\omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$,
- un spectre de forme gaussienne : $S(\omega) = \frac{2}{(N)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$ avec $\sigma = \Delta\omega/2, 35$,
- un spectre en sinus cardinal pour retrouver le train d'ondes : $S(\omega) = \frac{1}{N} \text{sinc}((\omega - \omega_0)\tau)$

3 - Superposition de signaux sinusoïdaux

a) Superposition de deux signaux sinusoïdaux

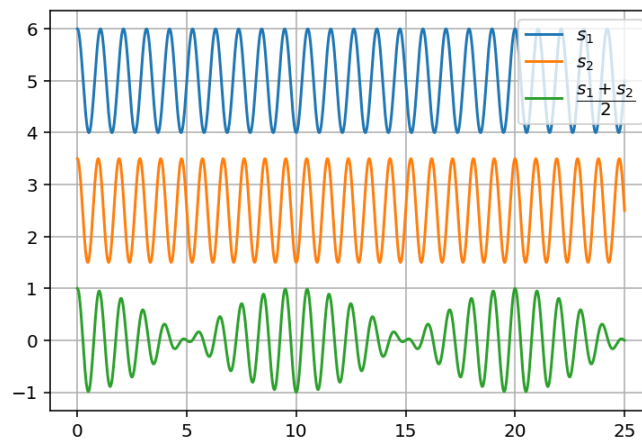
Dans ce paragraphe, on se contente de sommer deux signaux sinusoïdaux de même amplitude $S_0 = 1$, de phases à l'origine des temps nulles et de pulsations différentes : $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2$ et $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2$ avec $\omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ et $\Delta\omega = \omega_0/5$.

✕ Définir une fonction (ssin) qui a pour paramètres d'entrée l'amplitude du signal, sa pulsation et le temps et qui donne en sortie $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$.

✕ Créer un tableau des dates entre 0 et $25.T_0$ avec T_0 la période du signal moyen.

✕ Sur une même figure, tracer les deux signaux sinusoïdaux et le signal somme/2 en les décalant verticalement.

🔗 Commenter.



b) Sommes de N signaux sinusoïdaux de même amplitude, influence de N , lien entre largeur spectrale et largeur temporelle

On introduit N_1 le nombre de composantes sinusoïdales pour un signal s donné :

$$s(t) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=0}^{N_1-1} S_0 \cos(\omega_i t)$$

avec $\omega_i = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} + i \delta\omega$ et $\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{N_1 - 1}$.

On peut prendre ω_0 de l'ordre de quelques rad.s^{-1} (par exemple 2π , pour une fréquence de 1,0 Hz) et $\Delta\omega$ de l'ordre de 0,1 rad.s^{-1} ou $\omega_0/10$.

✕ Pour $N_1 = 5$, tracer sur un même graphe les signaux résultants pour k composantes sinusoïdales, k variant de 1 à N_1 .

✕ Pour $N_2 = 11$ composantes, vérifier que vous avez bien le produit extension temporelle par extension spectrale de l'ordre de 1.

4 - Représentation spectrale et représentation temporelle

✕ Définir trois fonctions (SpectrePorte, SpectreGauss, SpectreSinc) qui donne chacune un des trois spectres

considérés.

- ✕ Tracer l'allure des trois spectres. Vérifier qu'ils ont à peu près la même largeur spectrale.
- ✕ Construire les trois signaux (sporte, sgauss, ssinc) et tracer leur représentation temporelle. Jouer sur le nombre de composantes en partant de 2.

IV - Paquet d'ondes et propagation

1 - Paquet d'ondes

D'une manière générale, un signal réel $s(x, t)$ se propageant selon les x croissants dans un milieu non absorbant s'écrit :

$$s(x, t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi(\omega)) d\omega.$$

$A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ décrivent respectivement les poids (densité d'amplitude) et les phases des différentes composantes harmoniques de pulsation ω . La fonction $k(\omega)$ décrit la relation de dispersion du milieu.

Pour un paquet d'ondes gaussien, nous prendrons comme précédemment :

$$\varphi(\omega) = 0 \text{ et } A(\omega) = A_0 \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec $\omega_0 \simeq 1$ et $\sigma \simeq 0,1$. $A(k)$ est non négligeable pour $\omega \in [\omega_0 - 5\sigma, \omega_0 + 5\sigma]$.

2 - Relation de dispersion

Pour un paquet d'onde étroit, nous pouvons effectuer un développement limité de k autour de ω_0 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2}(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2$$

On peut introduire la vitesse de phase de l'onde moyenne $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$, la vitesse de groupe $v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}(\omega_0)}$ et

$$B = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{d^2k}{d\omega^2}(\omega_0)}.$$

Nous allons envisager les trois situations suivantes :

type	relation de dispersion	v_φ	v_g	B
linéaire	$k = \omega/c$	c	c	0
affine	$k = \frac{4\omega - \omega_0}{3c}$	c	0,75 c	0
affine	$k = 2 \frac{4\omega + \omega_0}{5c}$	c/2	5 c/8	0
parabolique	$k = \frac{2\omega_0^2 - 2\omega\omega_0 + \omega^2}{3 * \omega_0 * c}$	c	1,25 c	1/2c ω_0

3 - Propagation

Pour les différentes relations de dispersion, tracer s à différents instants pour voir évoluer le paquet d'ondes.