



Équation de Schrödinger pour une particule libre

1. Conservation locale de la densité de probabilité

En électromagnétisme, on a vu que l'équation locale de conservation de la charge totale contenue dans un volume donné d'un conducteur s'écrit $\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ où $\rho(M, t)$ est la densité volumique de charge au point M à l'instant t et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant. Ce qui donne, pour un problème à une dimension suivant l'axe (Ox) , avec $\vec{j} = j\vec{e}_x$: $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$.

En mécanique quantique, la probabilité totale de trouver la particule dans un volume donné doit aussi être conservée.

1. En combinant l'équation de Schrödinger à une dimension et son expression complexe conjuguée, établir l'équation locale de conservation de la probabilité, reliant la densité de probabilité ρ à la densité de courant de probabilité $\vec{J}$ dont on donnera l'expression.
2. En utilisant la relation de dispersion de l'onde plane $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, exprimer le vecteur densité de courant de probabilité $\vec{J}(x, t)$ en fonction de $\vec{k}$ (retrouver le résultat du cours) puis en fonction de la vitesse de groupe $\vec{v}_g$ associée au paquet d'onde décrivant la particule.
3. Proposer une analogie entre mécanique quantique et électromagnétisme dans ce contexte.

2. Combinaison linéaire d'états stationnaires

Soit une fonction d'onde $\psi(M, t)$ résultant de la combinaison linéaire de deux états stationnaires de fonctions d'ondes spatiales respectives $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$, et d'énergies respectives E_1 et $E_2 > E_1$.

1. Montrer que la densité de probabilité de présence dépend du temps et préciser son temps caractéristique d'évolution τ .
2. Décrire qualitativement l'évolution temporelle.
3. Montrer que $\tau(E_2 - E_1) \geq \frac{\hbar}{2}$ et interpréter.

3. Paquet d'ondes à spectre rectangulaire

On s'intéresse à une particule libre qui se déplace suivant l'axe Ox . On va supposer que plusieurs quantités de mouvement existent autour de p_0 , à $\Delta p \ll p_0$ près, et on construit le paquet d'ondes suivant :

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (px - E(p)t) \right] dp$$

On suppose pour calculer la précédente formule que

$$A(p) = \begin{cases} A_0 & \text{si } p \in \left[p_0 - \frac{\Delta p}{2}, p_0 + \frac{\Delta p}{2} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer l'allure du spectre $A(p)$.
2. Le calcul de la fonction d'onde montre que :

$$\psi(x, t) = C \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(p_0 x - \frac{p_0^2 t}{2m} \right) \right) \text{sinc} \left(\frac{\Delta p}{2\hbar} \left(x - \frac{p_0}{m} t \right) \right)$$

où C est une constante.

- (a) Où se trouve le maximum de la densité de probabilité à la date t ? Interpréter sa dépendance en t .
- (b) Évaluer la largeur Δx de la densité de probabilité. Est-ce cohérent avec l'inégalité de Heisenberg spatiale?
- (c) Tracer l'allure de $|\psi(x, t)|^2$ en fonction de x à deux dates différentes.
- (d) Montrer qu'on peut normaliser cette fonction d'onde. On donnera C , sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x dx = \pi$.