



Devoir surveillé n°6

Samedi 21 février 2026

Durée : 4h00

- Vous devez vérifier que le sujet comprend 12 pages numérotées et une annexe de 2 pages ;
- Vous êtes invités à porter une attention toute particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute réponse devra être justifiée et ce, même si l'énoncé ne le précise pas (sauf mention particulière).
- Vous devez établir une relation littérale avant d'effectuer toute application numérique (sauf mention particulière).
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'homogénéité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- Le téléphone portable est strictement interdit. Il doit être rangé éteint dans le sac.
- **La calculatrice est autorisée.**

Données pour tout le devoir :

L'entropie du gaz parfait a pour expression :

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + \mathcal{C}_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

avec $\mathcal{C}_V$ capacité thermique à volume constant du gaz parfait
ou

$$S(T, P) = S(T_0, P_0) + \mathcal{C}_P \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

avec $\mathcal{C}_P$ capacité thermique à pression constante du gaz parfait

L'entropie d'une phase condensée :

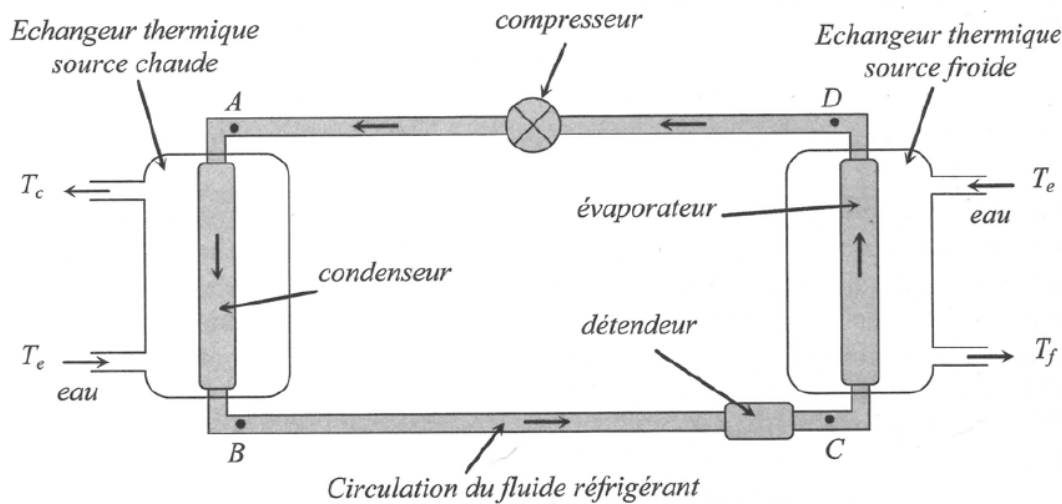
Pour un système de capacité thermique C (phase condensée incompressible, indilatable) :

$$S(T) = C \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + S(T_0)$$

Première partie

Machine thermique ditherme

Le problème suivant propose une étude expérimentale d'une machine thermique ditherme utilisant la circulation forcée d'un fluide réfrigérant, le dichlorodifluorométhane CCl_2F_2 appelé aussi fréon R12, entre une source chaude et une source froide. La puissance électrique fournie à la machine est transmise à un compresseur qui entraîne le fluide à travers un condenseur, un détendeur, puis un évaporateur. Un schéma simplifié du dispositif est représenté ci-dessous.



Des appareils de mesure permettent de caractériser le fluide réfrigérant à différents stades du cycle, par son débit massique, sa température et sa pression.

Le fluide réfrigérant subit les transformations suivantes :

- De A à B : Le fluide, en A, sous forme de vapeur sous pression, est mis en contact avec la circulation d'eau dans l'échangeur thermique de la source chaude, et subit une condensation isobare de l'état vapeur à l'état liquide. L'énergie libérée par la condensation est en partie transférée à l'eau dont la température augmente de T_e à T_c .
- De B à C : Le liquide subit une détente isenthalpique à travers une vanne d'expansion. Le fluide en C se trouve alors partiellement vaporisé.
- De C à D : Le mélange liquide-vapeur est mis en contact avec l'eau en circulation dans l'échangeur thermique de la source froide, et se vaporise entièrement de façon isobare. L'énergie thermique nécessaire à cette vaporisation est partiellement apportée par l'eau dont la température diminue de T_e à T_f .
- De D à A : Le fluide sous forme vapeur subit une compression adiabatique en recevant l'énergie mécanique du compresseur.

On a reporté les mesures expérimentales dans le tableau ci dessous :

- Compresseur : puissance électrique consommée : 500 W
- Circulations d'eau
 - Source chaude : débit massique $D_{mc} = 72 \text{ kg.h}^{-1}$; $T_e = 18,5^\circ\text{C}$; $T_c = 28,0^\circ\text{C}$
 - Source froide : débit massique $D_{mf} = 40 \text{ kg.h}^{-1}$; $T_e = 18,5^\circ\text{C}$; $T_f = 6,0^\circ\text{C}$
- Circulation du fluide réfrigérant
 - Débit massique $D_m = 25 \text{ kg.h}^{-1}$
 - Condenseur Pression en A : 10 bars $T_A = 64,0^\circ\text{C}$; $T_B = 42,0^\circ\text{C}$
 - Évaporateur Pression en C : 2,5 bars $T_C = -7,0^\circ\text{C}$; $T_D = 0,0^\circ\text{C}$

Les températures sont mesurées à 0,5 °C près et les pressions à 0,1 bar près. Les débits massiques sont obtenus à 10% près. Le constructeur précise que le compresseur a un rendement mécanique de l'ordre de 45%. La machine thermique est supposée avoir atteint son régime de fonctionnement stationnaire.

On donne la capacité thermique de l'eau : $c_{eau} = 4,18.10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

I Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

On considère l'écoulement parfait et stationnaire d'un fluide à travers un système ouvert ($\mathcal{S}$), définissant un volume de contrôle indéformable et fixe dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ et présentant une entrée et une sortie (figure 1).

On définit comme système d'étude le système fermé, noté ($\mathcal{S}^*$), constitué du fluide contenu à l'instant t dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_1 qui y rentre entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droites (Σ'_1) et (Σ_1), et définissant un sous-système ($\mathcal{S}_1$). À l'instant $t + dt$, il est constitué du fluide contenu dans le volume de contrôle et du fluide de masse δm_2 qui en sort entre les instants t et $t + dt$, situé entre les sections droite (Σ_2) et (Σ'_2), et définissant un sous-système ($\mathcal{S}_2$).

On note T_i , p_i , ρ_i , $e_{c,i}$, $e_{p,i}$, u_i et h_i respectivement la température, la pression, la masse volumique, l'énergie cinétique massique, l'énergie potentielle de pesanteur massique, l'énergie interne massique et l'enthalpie massique du fluide contenu dans chaque sous-système ($\mathcal{S}_i$) où $i = 1, 2$.

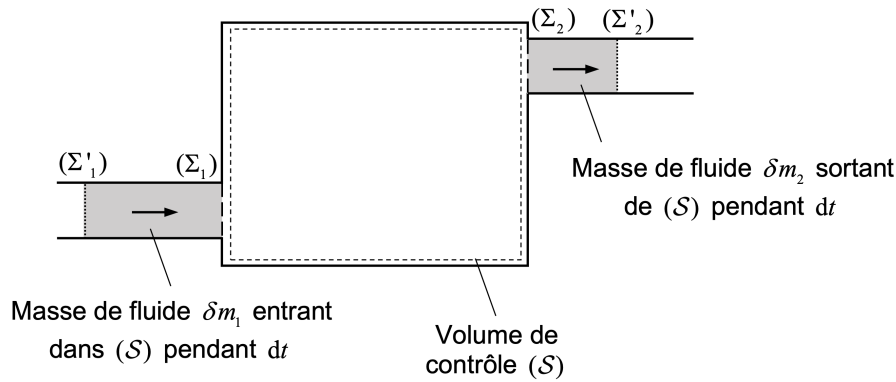


Figure 1 - Fluide en écoulement stationnaire : système fermé étudié

1. En traduisant la conservation de la masse du fluide contenu dans le système ($\mathcal{S}^*$), justifier que le débit massique du fluide en entrée est égal à celui en sortie : $\frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt} = D_m$.
2. Montrer que le travail massique des forces pressantes reçu par le fluide contenu dans le système ($\mathcal{S}^*$) pendant la durée dt s'écrit : $w_p = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$.
3. Montrer que la variation d'énergie interne du fluide contenu dans le système ($\mathcal{S}^*$) pendant la durée dt s'écrit : $dU = D_m(u_2 - u_1)dt$.
Donner, sans calculs supplémentaires, les expressions des variations d'énergie cinétique macroscopique dE_c et d'énergie potentielle de pesanteur dE_p du fluide.
4. À partir d'un bilan énergétique pour le fluide contenu dans le système ($\mathcal{S}^*$) pendant la durée dt , établir l'expression du premier principe pour un écoulement stationnaire :

$$D_m[(h_2 + e_{c,2} + e_{p,2}) - (h_1 + e_{c,1} + e_{p,1})] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où $\mathcal{P}_u$ et $\mathcal{P}_{th}$ sont respectivement la puissance mécanique des forces extérieures non conservatives autre que celle des forces pressantes (puissance dite utile) et le flux thermique reçus par le fluide contenu dans le volume de contrôle.

Dans la suite du problème, on néglige les variations d'énergie cinétique du fluide et les variations d'énergie potentielle de pesanteur.

II Utilisation des diagrammes

On se propose d'effectuer une étude détaillée des échanges thermiques effectués lors des transitions de phase du fluide réfrigérant. Les diagrammes thermodynamiques enthalpique (p, h) et entropique (T, s) du dichlorodifluorométhane sont fournis.

On utilise dans un premier temps le diagramme enthalpique.

5. (a) Reporter la position des points A, B, C et D sur le diagramme enthalpique (p, h). En déduire l'état physique du fluide dans chaque cas.
 (b) Relever les enthalpies massiques des points A, B, C et D .
6. En déduire :
 (a) la puissance P_c reçue par le fluide de la part de la source chaude.
 (b) la puissance P_f reçue par le fluide de la part de la source froide.
 (c) la puissance mécanique P_u fournie au fluide par le compresseur ; évaluer son rendement réel. Commenter.
7. Effectuer un bilan énergétique pour le cycle. Commenter.

On souhaite confirmer ces résultats à l'aide du diagramme entropique.

8. (a) Reporter la position des points A, B, C et D sur le diagramme entropique (T, s), et tracer le cycle.
 (b) Calculer les entropies massiques des points A, B, C et D .
9. Au cours d'une évolution isobare, l'énergie thermique massique échangée est donnée par l'aire sous la courbe d'évolution dans un diagramme entropique. En déduire une nouvelle mesure des puissances thermiques P_c et P_f reçues par le fluide lors de son passage dans le condenseur et l'évaporateur. Commenter.
10. La compression du fluide est-elle isentropique ? Évaluer l'entropie produite par unité de temps dans le compresseur. Quelle est son origine ?
11. Mesurer l'enthalpie massique et l'entropie massique de liquéfaction à la pression de 10 bars. Quelle relation lie ces grandeurs ?
12. Préciser la composition du mélange liquide-vapeur au point C . On effectuera la mesure sur les diagrammes enthalpique et entropique. Conclure.

III Efficacités thermodynamiques

Les mesures précédentes de puissances thermiques et de puissance reçues par le fluide vont permettre d'estimer l'efficacité thermodynamique de la machine thermique, en tant que pompe à chaleur ou machine frigorifique.

13. (a) Définir l'efficacité e_{PAC} de la machine en tant que pompe à chaleur, et l'efficacité e_{MF} de la machine en tant que machine frigorifique.
 (b) Calculer numériquement e_{PAC} et e_{MF} .

On souhaite à présent comparer ces efficacités à l'efficacité maximale obtenue en suivant un cycle de Carnot proche du fonctionnement de la machine et passant par $B' = B$ et le point D' d'entropie $s_{D'} = 0,70 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et de température $T_{D'} = -6,0^\circ\text{C}$.

14. Représenter le cycle de Carnot noté $A'B'C'D'$ dans le diagramme entropique.
15. (a) En déduire numériquement les efficacités de Carnot e_{PAC}^C pour un fonctionnement en pompe à chaleur, et e_{MF}^C pour un fonctionnement en machine frigorifique.
 (b) Comparer ces valeurs à l'efficacité théorique de Carnot. Conclure.

On peut définir le rendement thermodynamique théorique de la machine thermique par le rapport de son efficacité expérimentale sur l'efficacité de Carnot.

16. Calculer le rendement thermodynamique théorique de la machine thermique proposée, en tant que pompe à chaleur et en tant que machine frigorifique. Conclure.

IV Rendement global

En pratique, la machine thermique reçoit directement la puissance électrique P_{elec} qui alimente le compresseur, tandis qu'elle fournit sa puissance thermique à la circulation d'eau. On souhaite donc estimer le rendement global de la machine, en ne tenant compte que des transferts énergétiques réellement effectués.

17. Déterminer les puissances thermiques reçues par l'eau à la source chaude et à la source froide. Commenter.
18. En déduire l'efficacité globale réelle, rapport des puissances utiles réelles sur la puissance dépensée, de la machine thermique en tant que pompe à chaleur ou en tant que machine frigorifique.

Comparer à l'efficacité du cycle de Carnot correspondant et conclure.

Deuxième partie

Le manchot empereur

Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire U :
 - $\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes
 - $\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques
 - $\vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques
- Opérateur laplacien vectoriel d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{u}_x + (\Delta a_y) \vec{u}_y + (\Delta a_z) \vec{u}_z \text{ où } \Delta a_i = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1,00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'eau à 20°C sous 1 bar : $\eta_e = 1,00 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$

Source : Gilbert C. et al., *Energy saving processes in huddling emperor penguins : from experiments to theory*, Journal of Experimental Biology, vol. 211, 2008, p. 1-8.

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de -40°C lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les -200°C lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de rayon $R = 10 \text{ cm}$, de longueur $\ell = 1,2 \text{ m}$, recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur $e_g = 2,0 \text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_g = 0,20 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur $e_a = 1,0 \text{ cm}$ d'air de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur $e_p = 2,0 \text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_p = 0,035 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance $\mathcal{P}_m$ permettant de maintenir sa température interne T_i constante.

I Généralités

On considère deux cylindres de même axe $(O, \vec{u}_z)$, de longueur ℓ et de rayons R_1 et R_2 , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives T_1 et $T_2 < T_1$ (figure 4).

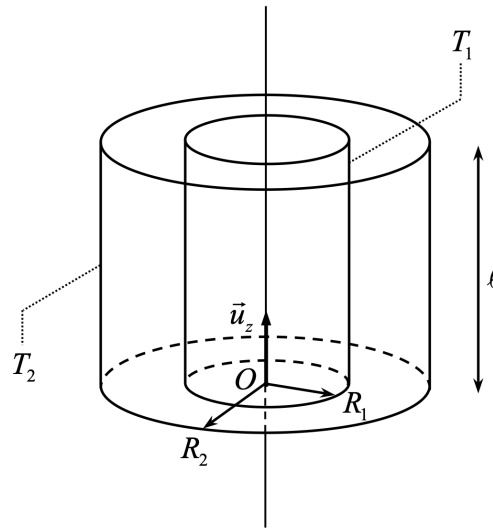


FIGURE 1 – Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique λ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point M du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la température y est donc fonction uniquement de la distance ρ à l'axe $(O, \vec{u}_z)$: $T(M) = T(\rho)$.

1. Le vecteur associé au flux thermique Φ_{th} est le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th}$. Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.
2. Justifier que $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$. Justifier physiquement le signe moins.
3. Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants t et $t + dt$, pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de longueur ℓ , de rayons ρ et $\rho + d\rho$ ($R_1 < \rho < R_2$). En déduire que l'expression du champ de température $T(\rho)$ en tout point M du milieu est :

$$T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln(\rho/R_1) + T_1.$$

4. Définir la résistance thermique R_{th} du milieu. Montrer qu'elle s'écrit :

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

II Détermination du métabolisme d'un manchot

5. Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon R du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.
6. En régime stationnaire, justifier que le flux thermique Φ_{th} dégagé par un manchot est égal à la puissance $\mathcal{P}_m$ due à son métabolisme.
7. Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de la question 4., donner l'expression de la résistance thermique $R_{th,1}$ équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de $R_{th,1}$.
8. Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température T_p et l'air extérieur à la température T_e sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif : $\vec{j}_{th,cc} = h(T_p - T_e)\vec{u}_\rho$ où h est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire S modélisant le manchot, exprimer en fonction de h et S la résistance thermique $R_{th,cc}$ associée à ce transfert.

9. En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives T_p et T_e très proches, on admet que le flux radiatif surfacique ϕ_r émis par le manchot s'écrit : $\phi_r \cong 4\sigma T_e^3(T_p - T_e)$ où σ est la constante de Stefan.

Exprimer, en fonction de σ , T_e et S , la résistance thermique R_r associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

10. Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique $R_{th,2}$ équivalente à cette association en fonction de σ , T_e , h et S . Calculer la valeur de $R_{th,2}$ lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température $T_e = -17^\circ\text{C}$ en présence d'un vent de vitesse $V = 5,0\text{ m s}^{-1}$. On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit : $h = 5,7 + 3,5 \cdot V$ où V est exprimé en m s^{-1} et h en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$.
11. Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale $R_{th,tot}$ du manchot en fonction de $R_{th,1}$ et $R_{th,2}$. En déduire la valeur de la puissance $\mathcal{P}_m$ due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne $T_i = 37,7^\circ\text{C}$ dans un environnement à la température $T_e = -17^\circ\text{C}$ et en présence d'un vent de vitesse $V = 5,0\text{ m s}^{-1}$. Vérifier que la puissance $\mathcal{P}_m$ est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus.

Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance $\mathcal{P}_m$ due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de -17°C et un vent moyen de $5,0\text{ m s}^{-1}$. Le tableau suivant rassemble leurs observations (tableau 1).

	Isolé	Petits groupes	Grands groupes
$\mathcal{P}_m$ (W)	85	52	43

TABLE 1 – Puissance due au métabolisme dans trois groupes de manchots différents

12. À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

Troisième partie

À propos du nucléaire militaire

Les recherches sur le noyau d'uranium ont mis en évidence le phénomène de fission nucléaire en 1939 ; ces travaux ont trouvé leur première application lors de l'explosion de la bombe d'Hiroshima, le 6 août 1945. Il va de soi que l'invention de la bombe atomique n'est peut-être pas le plus grand progrès de l'Humanité. Mais en l'état actuel des choses, cette arme existe, et il est souhaitable d'en aborder l'aspect physique pour mieux en saisir les tenants et aboutissants scientifiques.

On rappelle par ailleurs les expressions d'analyse vectorielle :

— En coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

— En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

I La désintégration de l'uranium 235

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes ; le plus répandu à l'état naturel, ^{238}U , possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est dit isotope "fissile". Lorsqu'un noyau est heurté par un neutron (noté n), il peut "fissionner", suivant la réaction suivante :



où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.

Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d' ^{235}U est $\nu \simeq 2,5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d' ^{235}U est en moyenne de 170.10^6 eV ($1 \text{ eV} = 1,6.10^{-19} \text{ J}$). Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

A. Diffusion de neutrons

1. Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d' U^{235} ?
2. L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4,2.10^9 \text{ J}$. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d' U^{235} , exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.
3. Soit $N(x, y, z, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et $\vec{J}$ le vecteur densité de flux de neutrons, tel que $\vec{J} \cdot \vec{dS} dt$ représente le nombre de neutrons traversant la surface $\vec{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt . On donne l'équation fondamentale de la neutronique :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\text{div } \vec{J} + \frac{\nu - 1}{\tau} N(x, y, z, t).$$

On rappelle la relation $\text{div}(\vec{\text{grad}} N) = \Delta N$.

- (a) En vous aidant d'analogies avec d'autres domaines de la Physique, pouvez-vous interpréter les deux termes situés à droite de l'égalité ?
- (b) Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?
- (c) Expliquer, en particulier, pourquoi $\nu - 1$ intervient dans le terme de droite, et pas ν .

B. Masse critique

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.

1. Calcul de la masse critique dans le cas d'une boule d'uranium 235 pur, de rayon R

On suppose que le problème est à géométrie sphérique de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$N = N(r, t) = N_1(r)e^{\nu' t/\tau} \quad \text{et} \quad \vec{J}(r, t) = -D \frac{\partial N}{\partial r} \vec{e}_r$$

Dans cette situation, on a :

$$\Delta N_1 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dN_1}{dr} \right).$$

- (a) On pose

$$g(r) = rN_1(r) \quad \text{et} \quad \alpha^2 = \left| \frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau} \right|;$$

montrer que la fonction $g(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique.

- (b) On recherche une fonction $r \rightarrow N_1(r)$ telle que $N_1(r = R) = 0$, que N_1 ne s'annule pas pour $r \in]0, R[$ et telle que N_1 tende vers une limite finie quand r tend vers zéro.

En examinant la forme des solutions selon que $\frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau}$ est négatif, nul ou positif, montrer que c'est possible pour une valeur de ν' que l'on exprimera en fonction de ν, D, τ et R .

- (c) Interpréter le fait que ν' augmente si R croît.
- (d) Quelle est la différence fondamentale entre les cas $\nu' > 0$ et $\nu' < 0$?
- (e) Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de D, τ et ν .
- (f) On donne pour $^{235}_{92}\text{U}$ de masse volumique $\rho = 19.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$: $\pi^2 D\tau = 2,2.10^{-2} \text{ m}^2$ et $\nu = 2,5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c , ainsi que la masse critique M_c (masse de la boule d'uranium de rayon R_c).

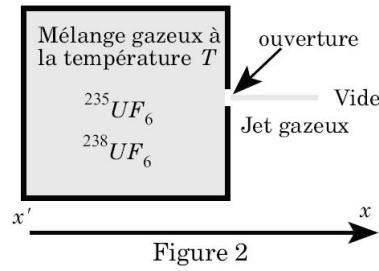
II Principe de la séparation isotopique par diffusion gazeuse

L'uranium naturel est à 99,3% sous forme de l'isotope 238, et à 0,7% sous forme de l'isotope fissile 235. Afin d'enrichir l'uranium en son isotope fissile, on peut utiliser des membranes percées de petits orifices, de sorte que les molécules les plus rapides aient plus de chance de traverser cette membrane.

A. Diffusion gazeuse à travers une petite ouverture

- 1. L'hexafluorure d'uranium UF_6 est assimilé à un gaz parfait.

- (a) Relier la vitesse quadratique moyenne $V = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ d'une molécule de masse m d'un gaz parfait à la température de ce gaz.



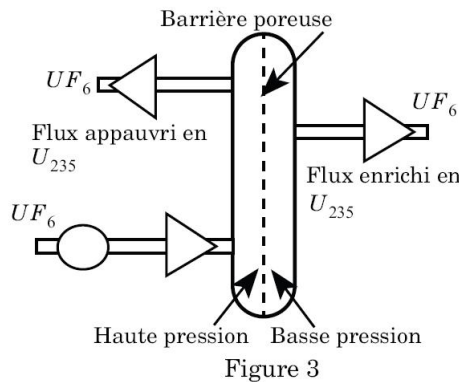
- (b) On suppose que la paroi du récipient contenant le gaz UF_6 est percée d'un petit orifice, d'aire S . Cet orifice appartient à une paroi perpendiculaire à l'axe $\vec{e}_x$. La pression à l'extérieur du récipient est supposée nulle. Pour simplifier, on considère le vecteur vitesse d'une molécule peut prendre 6 valeurs équiprobables $\pm V\vec{e}_x$, $\pm V\vec{e}_y$ ou $\pm V\vec{e}_z$. Le récipient contient un mélange des deux gaz $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ sous la pression partielle respective P_{235} et P_{238} . Soit δN_{235} le nombre de molécules d' $^{235}\text{UF}_6$ qui traversent l'orifice pendant l'intervalle de temps dt , et δN_{238} le nombre de molécules d' $^{238}\text{UF}_6$ qui traversent l'orifice pendant le même intervalle de temps. Montrer que

$$\frac{\delta N_{235}}{\delta N_{238}} = \left(\frac{M_{238}}{M_{235}} \right)^\alpha \left(\frac{P_{238}}{P_{235}} \right)^\beta$$

où M_{235} est la masse molaire du gaz $^{235}\text{UF}_6$ et M_{238} est la masse molaire du gaz $^{238}\text{UF}_6$. On explicitera les exposants α et β .

- (c) On donne la masse molaire du fluor : $19.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$. Le récipient a été rempli avec de l'hexafluorure d'uranium « naturel » ; la proportion d' $^{235}\text{UF}_6$ dans ce récipient va augmenter au cours du temps. Évaluer numériquement le rapport $\frac{J_{235}}{J_{238}}$ des flux de matière sortant du récipient, à l'instant initial de l'ouverture de l'orifice.
- (d) Pourquoi utiliser de l'hexafluorure d'uranium plutôt que de l'hexachlorure d'uranium ?

B. Mise en cascade de cellules de diffusion gazeuse



Une usine de séparation isotopique par diffusion gazeuse utilise des centaines de cellules élémentaires de diffusion gazeuse ; chaque cellule (figure 3) se compose essentiellement d'une membrane poreuse et d'un système de pompage. On alimente à gauche et on pompe à droite, de sorte que, comme dans la question précédente, on peut considérer que l'espace à droite de la paroi est quasi-vide. La pression à l'entrée est la même pour toutes les cellules. On a le schéma de la figure 3 en régime stationnaire.

On a donc en amont de la cellule un mélange de deux gaz $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$.

1. Soit r_{235} le rapport $\frac{P_{235}}{P_{238}}$ à un endroit donné ; à l'entrée de l'usine, on a $r_{235,0} = 0,7\%$. Soit $r_{235,1}$ le rapport

$\frac{P_{235}}{P_{238}}$ à la sortie de la première cellule ; justifier que

$$r_{235,1} = r_{235,0} \sqrt{\frac{M_{238}}{M_{235}}}$$

2. (a) Une centrale nucléaire typique nécessite un uranium enrichi, tel que $r_{235,n_c} = 3\%$. Déterminer n_c , nombre de cellules de diffusion disposées en cascade pour obtenir 3% d'uranium fissile.
(b) Une bombe à uranium nécessite de l'uranium hautement enrichi, tel que $r_{235,n_b} = 90\%$; exprimer n_m , nombre de cellules nécessaires dans une usine d'enrichissement destinée à des fins militaires.
3. Quels autres principes physiques pourriez-vous proposer pour séparer les deux isotopes de l'uranium ? (on se limitera à 10 lignes au maximum).

Annexe à rendre avec votre nom

Diagramme enthalpique (p-h) du dichlorodifluorométhane

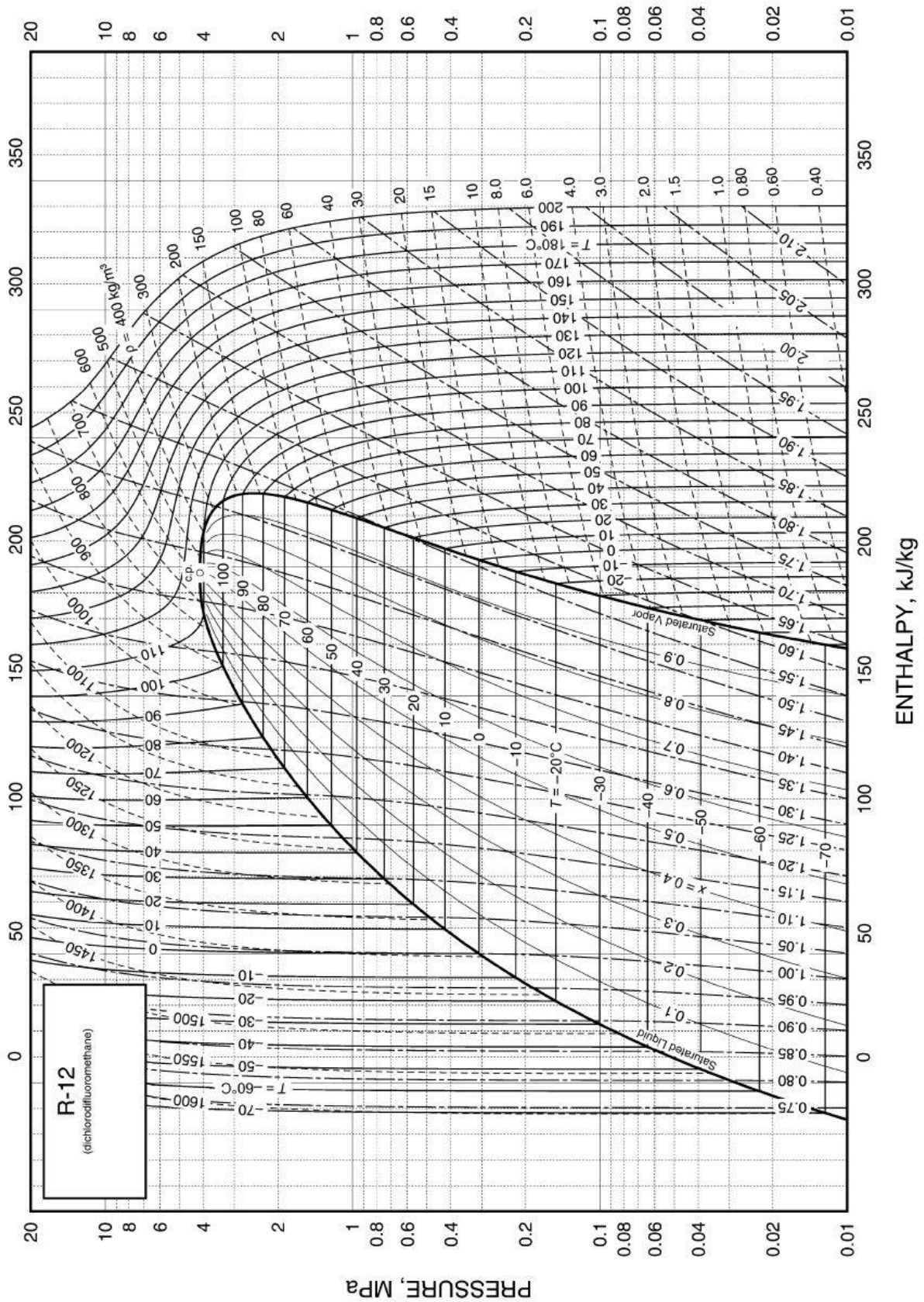


Diagramme entropique (T-s) du dichlorodifluorométhane

