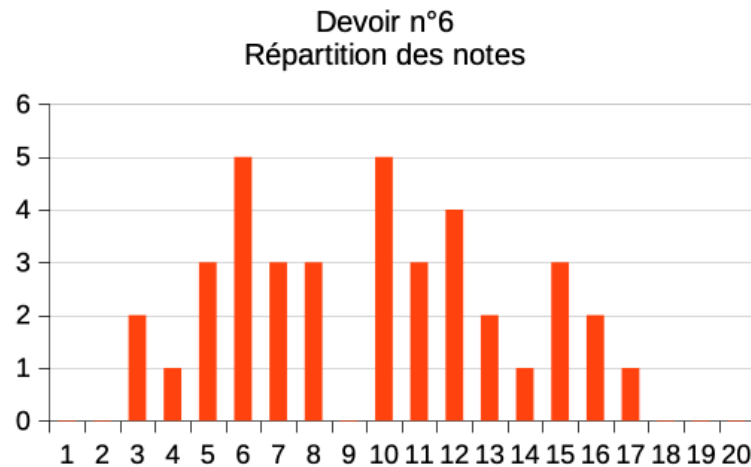


Meilleure note : 17,5

Moyenne : 9,9

Médiane : 10,2

Écart-type : 3,9



## Première partie

# Machine thermique ditherme

## I Bilan énergétique pour un fluide en écoulement stationnaire

1. Par définition de  $\mathcal{S}^*$ , système fermé, on a conservation de la masse soit,  $m_{\mathcal{S}^*}(t) = m_{\mathcal{S}^*}(t + dt)$ . Or  $m_{\mathcal{S}^*}(t) = m_{\mathcal{S}}(t) + \delta m_1$  et  $m_{\mathcal{S}^*}(t + dt) = m_{\mathcal{S}}(t + dt) + \delta m_2$ . Comme  $\mathcal{S}$  est immobile et que l'on est en régime stationnaire,  $m_{\mathcal{S}}(t) = m_{\mathcal{S}}(t + dt)$ . On en déduit donc que  $\delta m_1 = \delta m_2$ . Puis, par définition du débit massique :

$$\frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt} = D_m.$$

2. Soit  $\delta W_P$  le travail des forces pressantes. On a  $\delta W_P = +p_1 \Sigma_1 v_1 dt - p_2 \Sigma_2 v_2 dt$  avec  $D_m dt = \rho_1 v_1 \Sigma_1 dt = \rho_2 v_2 \Sigma_2 dt = \delta m$ .

D'où un travail massique des forces pressantes de la forme :

$$w_p = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Notons que sur les parois latérales, le travail est nul car les parois sont supposées indéformables.

3. Soit  $U$  l'énergie interne du système fermé  $\mathcal{S}^*$ .

- à la date  $t$ ,  $\mathcal{S}^*$  est constitué de  $\mathcal{S}$  et de la masse  $\delta m_1$  de fluide entrant pendant  $dt$  :
- à la date  $t + dt$ ,  $\mathcal{S}^*$  est constitué de  $\mathcal{S}$  et de la masse  $\delta m_2$  de fluide sortant pendant  $dt$  :

$U$  étant extensive, on peut écrire

$$\begin{cases} U_{\mathcal{S}^*}(t) = U_{\mathcal{S}}(t) + \delta U_1 \\ U_{\mathcal{S}^*}(t + dt) = U_{\mathcal{S}}(t + dt) + \delta U_2 \end{cases}$$

où  $\delta U_1$  est l'énergie interne du fluide entrant et  $\delta U_2$  est l'énergie interne du fluide sortant, que l'on peut écrire respectivement

$$\delta U_1 = u_1 \delta m_1 \text{ et } \delta U_2 = u_2 \delta m_2$$

en introduisant l'énergie interne massiques  $u$  en entrée et en sortie.

L'hypothèse du régime permanent a pour conséquence le fait que

$$U_{\mathcal{S}}(t + dt) = U_{\mathcal{S}}(t)$$

Il en résulte que

$$U_{\mathcal{S}^*}(t + dt) - U_{\mathcal{S}^*}(t) = (u_2 - u_1) \delta m$$

D'où : 
$$dU = D_m(u_2 - u_1)dt.$$

De même : 
$$dE_c = D_m(e_{c,2} - e_{c,1})dt \text{ et } dE_p = D_m(e_{p,2} - e_{p,1})dt$$

4. On applique le premier principe de la Thermodynamique au système fermé  $\mathcal{S}^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  ; si  $E$  désigne l'énergie totale du système, on a

$$dE = \delta W + \delta Q$$

avec

$$\begin{cases} E = U + E_c + E_p \\ dE = (e_2 - e_1)\delta m = (e_2 - e_1)D_m dt \\ \delta W = \delta W_u + \delta W_{pres} = P_u dt + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) D_m dt \\ \delta Q = P_{th} dt \end{cases}$$

Soient  $h = u + \frac{p}{\rho}$  l'enthalpie massique et  $e_m = e_p + e_c$  l'énergie mécanique massique ; on obtient successivement

$$[u + e_p + e_c]_1^2 D_m dt = (P_{th} + P_u)dt + \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) D_m dt$$

et

$$D_m (h_2 - h_1 + e_{c,2} - e_{c,1} + e_{p,2} - e_{p,1}) = P_{th} + P_u$$

## II Utilisation des diagrammes

5. (a) Le point  $A$  est à l'intersection de l'isotherme  $T_A = 64,0^\circ\text{C}$  et de l'isobare 10 bars : c'est de la **vapeur sèche**.

Le point  $B$  est à l'intersection de l'isotherme  $T_B = 42,0^\circ\text{C}$  et de l'isobare 10 bars, sur la courbe d'ébullition : c'est du **liquide juste saturé**.

Le point  $C$  est sur l'isobare 2,5 bars, sur la même isenthalpique que  $B$  : le système est **diphase** (liquide-vapeur).

Le point  $D$  est à l'intersection de l'isotherme  $T_D = 0,0^\circ\text{C}$  et de l'isobare 2,5 bars : c'est de la **vapeur sèche**.

5. (b) On relève les valeurs :  $h_A = 225 \text{ kJ.kg}^{-1}$  ;  $h_B = h_C = 80 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et  $h_D = 195 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

6. L'application du premier principe conduit directement à :

(a) la puissance reçue de la part de la source chaude

$$P_c = D_m (h_B - h_A)$$

puisque  $P_u^{cond} = 0$

$$\text{AN : } P_c = -1,0 \text{ kW}$$

(b) la puissance reçue de la part de la source froide

$$P_f = D_m (h_D - h_C)$$

puisque  $P_u^{evap} = 0$ .

$$\text{AN : } P_f = +0,78 \text{ kW}$$

(c) Pour une évolution adiabatique,

$$P_{th}^{AD} = 0$$

et la puissance mécanique fournie au fluide par le compresseur vaut

$$P_u = D_m (h_A - h_D)$$

$$\text{AN : } P_u = +0,23 \text{ kW}$$

Le compresseur reçoit la puissance électrique

$$P_{elec} = 0,5 \text{ kW};$$

son rendement vaut :  $\eta_{comp} = \frac{P_u}{P_{elec}} = 46\%$

On retrouve bien l'ordre de grandeur fourni par le constructeur.

7. Pour le cycle,  $\Delta H = 0$  soit  $W_{meca} + Q_f + Q_c = 0$  soit en termes de puissance :

$$P_c + P_f + P_u = 0$$

Numériquement :  $P_c + P_f + P_u = 0,01 \text{ kW}$ . Aux incertitudes de mesures portant sur le dernier chiffre significatif, le bilan est bien validé.

8. (a) On place les points comme précédemment en utilisant les coordonnées fournies par l'énoncé.

Le point  $A$  est à l'intersection de l'isotherme  $T_A = 64,0^\circ\text{C}$  et de l'isobare 10 bars. Le point  $B$  est à l'intersection de l'isotherme  $T_B = 42,0^\circ\text{C}$  et de l'isobare 10 bars,

sur la courbe d'ébullition.

Le tronçon  $AB$  suit d'abord l'isobare oblique dans le domaine de la vapeur sèche, puis l'isobare horizontale dans le domaine diphasé.

Le point  $C$  est sur l'isobare 2,5 bars, sur la même isenthalpique de  $B$ .

Le point  $D$  est à l'intersection de l'isotherme  $T_D = 0,0^\circ\text{C}$  et de l'isobare 2,5 bars.

Le tronçon  $CD$  suit d'abord l'isobare horizontale dans le domaine diphasé, puis l'isobare oblique dans le domaine de la vapeur sèche.

(b) On relève  $s_A = 0,74 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ;  $s_B = 0,28 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ;  
 $s_C = 0,31 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ;  $s_D = 0,72 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

9. Dans un diagramme entropique, l'énergie thermique échangée est donnée par la surface sous la courbe; on en déduit la puissance  $P = D_m \int T ds$

Pour la transformation  $AB$ , en posant  $A'$  le point de l'isobare =10 bars sur la courbe de rosée,  $s_{A'} = 0,68 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  :

$$P_c \simeq T_B D_m (s_B - s_A) + \frac{D_m}{2} (T_A - T_B) (s_{A'} - s_A) = -1 - 0,0045 \text{ kW}$$

La contribution petit triangle  $A'A$  est négligeable; on retient

$$P_c \simeq -1,0 \text{ kW}$$

De même,

$$P_f \simeq T_C D_m (s_D - s_C) = 0,76 \text{ kW}$$

On retrouve les valeurs obtenues par l'étude du diagramme enthalpique.

10. La compression  $DA$  n'est pas tout à fait représentée par un tronçon vertical : elle n'est pas isentropique.

D'après le second principe industriel :

$$\Delta_{D \rightarrow A} s = s_{\text{ech}} + s_{\text{creee}}$$

avec ici  $s_{\text{ech}} = 0$  pour une adiabatique.

Il reste

$$s_{\text{creee}} = s_A - s_D = \dot{S}_{\text{creee}}$$

et l'entropie créée par unité de temps vaut

$$\dot{S}_{\text{creee}} = D_m (s_A - s_D)$$

$$\text{AN : } \dot{S}_{\text{creee}} = 0,14 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1}.$$

Cette entropie créée est due à l'existence de frottements mécaniques dans le compresseur.

11. On mesure à la température de  $42^\circ\text{C}$  et à la pression de 10 bars sur la courbe d'ébullition :  $h_L = 80 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $s_L = 0,28 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et sur la courbe de rosée :  $h_V = 210 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $s_V = 0,68 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . On en déduit l'enthalpie massique de liquéfaction

$$h_{liq} = h_L - h_V = -130 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

et l'entropie massique de liquéfaction

$$s_{liq} = s_L - s_V = -0,40 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

On vérifie à la température de  $42^\circ\text{C} = 315 \text{ K}$  :

$$s_{liq} = \frac{h_{liq}}{T} = -0,413 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

On retrouve aux incertitudes de mesure près, la valeur attendue.

12. On a mesuré au point  $C$  :  $h_C = 80 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et  $s_C = 0,31 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . On mesure aux extrémités du palier de température  $T_C = -7^\circ\text{C}$  et de pression  $p_C = 2,5 \text{ bar}$  les enthalpie et entropie massiques, sur la courbe d'ébullition :  $h_L = 35 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $s_L = 0,12 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , et sur la courbe de rosée :  $h_V = 190 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $s_V = 0,71 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . L'enthalpie  $H$  du fluide étant une grandeur extensive :

$$H = H_{liq} + H_{vap} = m_{liq} h_L + m_{vap} h_V$$

ou en divisant par la masse  $m$  du mélange :

$$h = \frac{m_{liq}}{m} h_L + \frac{m_{vap}}{m} h_V = x_{liq} h_L + x_{vap} h_V = (1 - x_{vap}) h_L + x_{vap} h_V$$

On en déduit la relation (des moments) :

$$x_{vap} = \frac{h - h_L}{h_V - h_L} = 0,29$$

De même, on a :

$$x_{vap} = \frac{s - s_L}{s_V - s_L} = 0,32$$

Les résultats sont cohérents.

### III Efficacités thermodynamiques

13. (a) Par définition, l'efficacité  $e_{PAC}$  d'une pompe à chaleur est  $\frac{-Q_c}{W}$  avec  $Q_c$  l'énergie fournie par la pompe à la source chaude et  $W$  l'énergie mécanique reçue par la pompe. En passant aux puissances, il vient immédiatement

$$e_{PAC} = -\frac{P_c}{P_u}$$

De même, pour une machine frigorifique, l'efficacité est  $\frac{Q_f}{W}$  avec  $Q_f$  l'énergie reçue de la pompe et issue de la source froide et  $W$  l'énergie mécanique reçue par la pompe. En passant aux puissances, il vient

$$e_{MF} = \frac{P_f}{P_u}$$

(b) AN :  $e_{PAC} = 4,3$  et  $e_{MF} = 3,4$ .

14. Le cycle de Carnot est constitué de deux isothermes et de deux isentropiques : il est représenté par un rectangle limité par les entropies massiques  $s_{B'} = s_{C'} = 0,28 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $s_{A'} = s_{D'} = 0,70 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , et par les températures  $T_{A'} = T_{B'} = 42^\circ\text{C}$  et  $T_{C'} = T_{D'} = -6^\circ\text{C}$ .

15. (a) On calcule comme à la question 6 les puissances thermiques échangées par le fluide lors des contacts avec les sources chaude et froide :

$$P'_c = T_{B'} D_m (s_{B'} - s_{A'}) = -0,92 \text{ kW et } P'_f = T_{C'} D_m (s_{D'} - s_{C'}) = 0,77 \text{ kW}$$

On en déduit la puissance mécanique à l'aide du premier principe appliqué à un cycle :

$$P'_c + P'_f + P'_u = 0$$

soit  $P'_u = 0,15 \text{ kW}$  puis  $e_{PAC}^C = -\frac{P'_c}{P'_u} = 6,1$  et  $e_{MF}^C = \frac{P'_f}{P'_u} = 5,1$ .

(b) L'efficacité théorique du cycle de Carnot peut s'exprimer directement en fonction des températures des deux sources :

$$e_{PAC}^{C,th} = \frac{T_{B'}}{T_{B'} - T_{C'}} = 6,5 \text{ et } e_{MF}^{C,th} = \frac{T_{C'}}{T_{B'} - T_{C'}} = 5,5$$

Les ordres de grandeur sont respectés.

16. On calcule pour chaque fonctionnement le rendement comme le rapport de l'efficacité réelle mesurée sur l'efficacité du cycle de Carnot correspondant :

$$\eta_{PAC} = \frac{e_{PAC}}{e_{PAC}^C} = 70\% \text{ et } \eta_{MF} = \frac{e_{MF}}{e_{MF}^C} = 67\%$$

La machine réelle a bien une efficacité inférieure à celle du cycle de Carnot correspondant.

### IV Rendement global

17. On peut calculer les puissances thermiques échangées par l'eau lors des contacts respectivement avec la source chaude :

$$P_{c,eau} = D_{m,eau} c_{eau} (T_c - T_e) = 0,79 \text{ kW}$$

reçue par l'eau et avec la source froide :

$$P_{f,eau} = D_{m,eau} c_{eau} (T_f - T_e) = -0,58 \text{ kW}$$

cedée par l'eau.

Or, les puissances échangées par le fluide réfrigérant ont été calculées :  $P_c \simeq -1,0 \text{ kW}$  cédé à la source chaude et  $P_f = 0,76 \text{ kW}$  reçu de la source froide.

Une partie importante, plus de 20 % environ de l'énergie apportée par le fluide réfrigérant est perdue, et n'est pas transférée à l'eau.

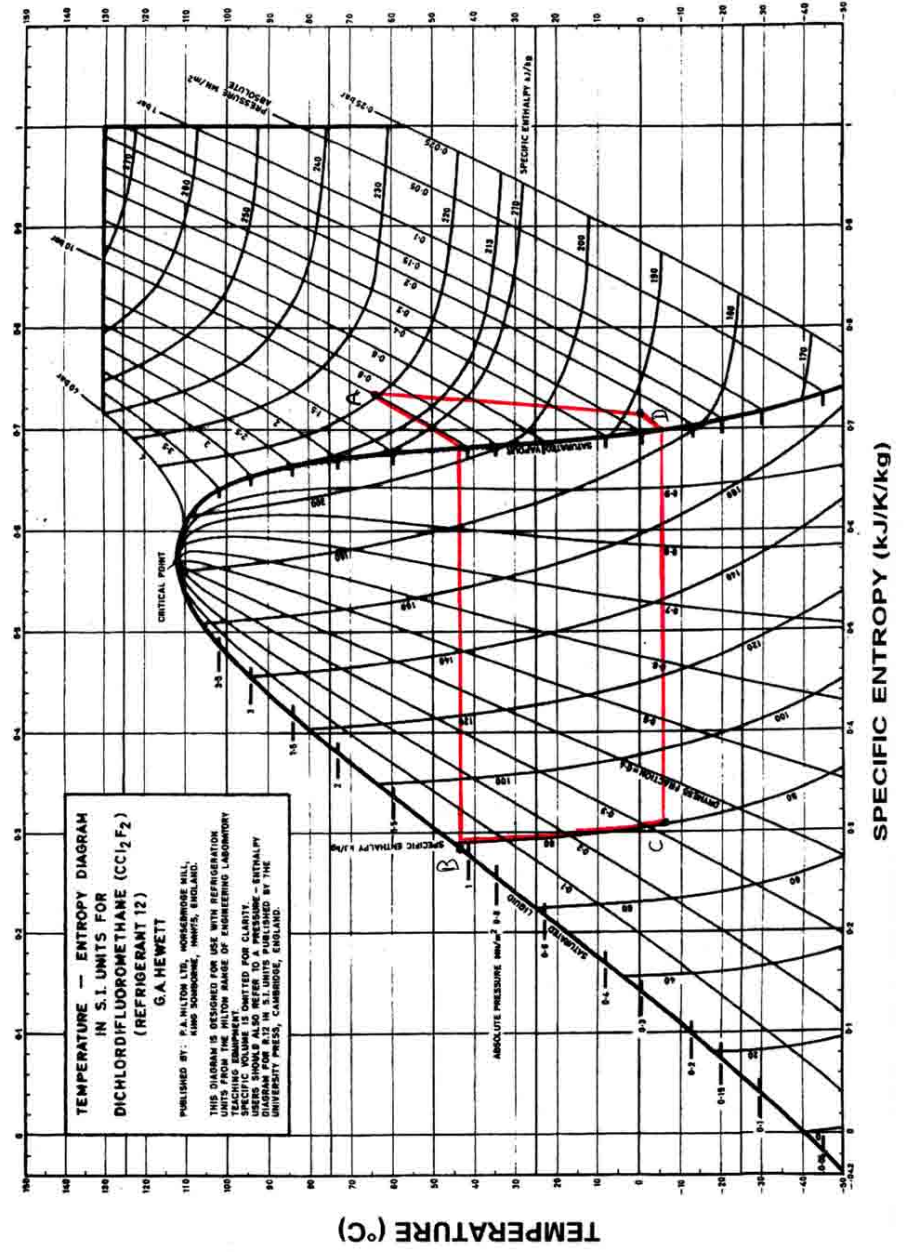
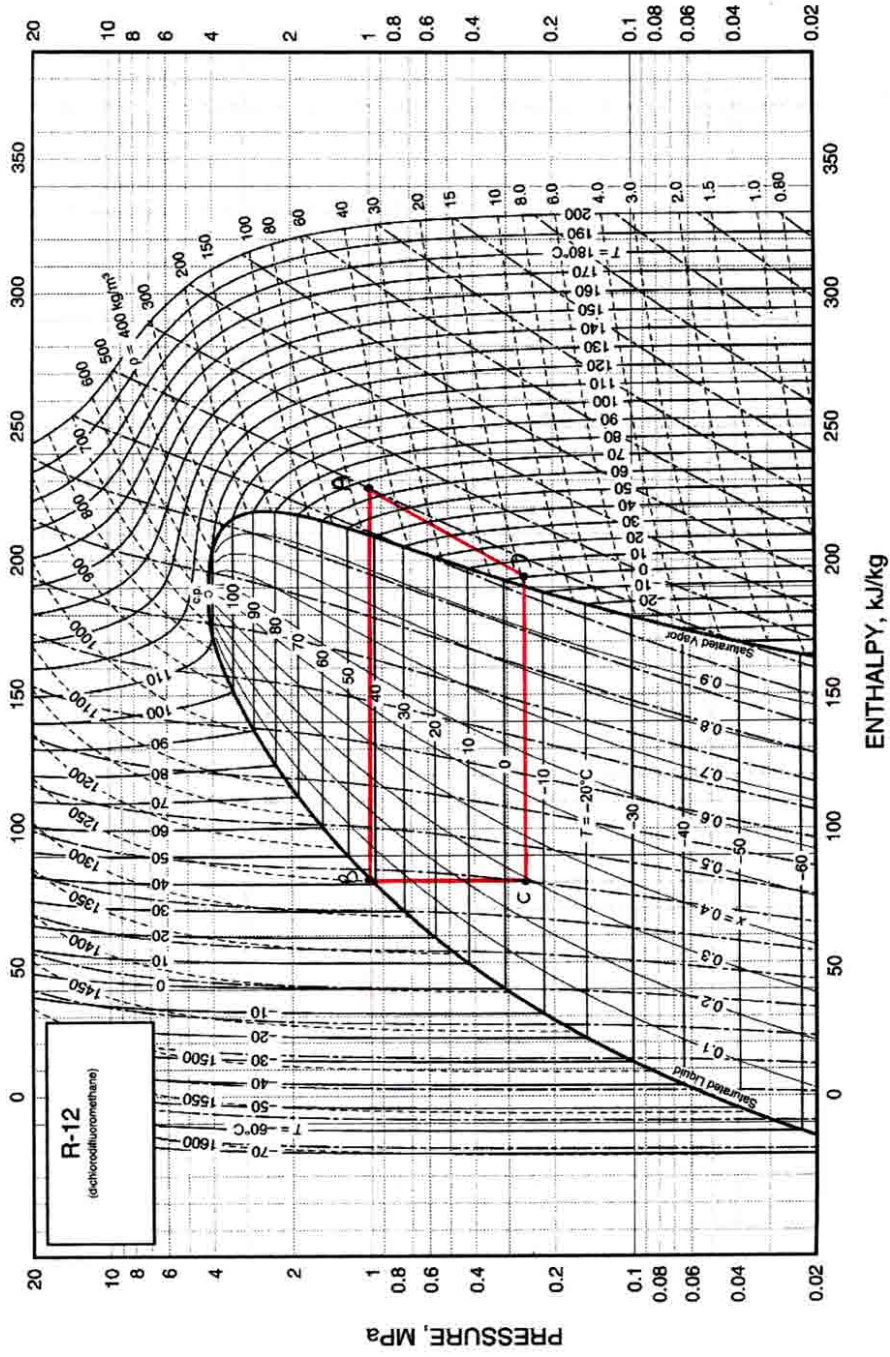
18. Les puissances utiles sont celles qui sont effectivement transférée à l'eau. La puissance dépensée par l'opérateur est la puissance électrique. On en déduit l'efficacité globale de la machine

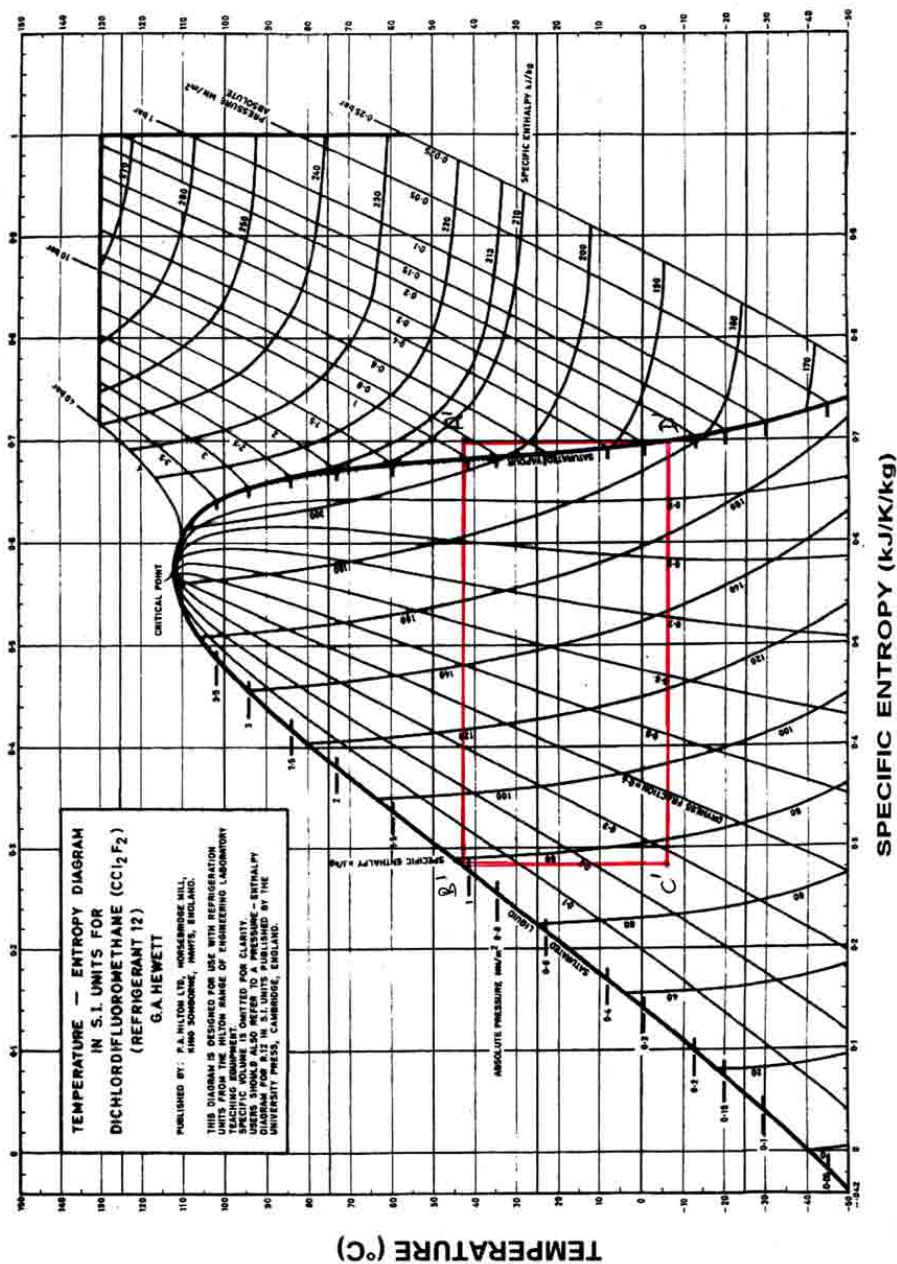
$$e_{PAC,global} = \frac{P_{c,eau}}{P_{elec}} = 1,6 \text{ et } e_{MF,global} = -\frac{P_{f,eau}}{P_{elec}} = 1,2$$

soit

$$\frac{e_{PAC,global}}{e_{PAC}^C} = 26\% \text{ et } \frac{e_{MF,global}}{e_{MF}^C} = 23\%$$

Le rendement global réel est bien plus faible que le rendement purement thermodynamique ; il tient compte des pertes thermiques dans les échangeurs, et du rendement imparfait de la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique dans le compresseur.





## Deuxième partie

# Le manchot empereur

Extrait de CCINP PC 2021

Rapport :

Le sujet était d'une longueur raisonnable puisqu'une majorité de candidats l'a abordé dans l'ordre et dans son ensemble. Il alternait entre des démonstrations proches du cours, des analyses physiques qualitatives, des applications numériques, des questions plus calculatoires de technicité mathématique toutefois modérée et une question du type « résolution de problème ». Plusieurs résultats intermédiaires étaient fournis permettant à chaque candidat de pouvoir s'exprimer sur les questions qui suivaient.

Le sujet comportait de nombreuses applications numériques, certes parfois longues à réaliser (Q16) mais valorisées dans le barème et qui étonnamment se sont révélées souvent fausses. Cela semble dénoter un manque d'habitude des candidats, considérant ces applications numériques comme des questions annexes sans difficultés qu'ils sauront toujours faire. La correction de l'épreuve a montré le contraire, la source principale d'erreurs étant une mauvaise maîtrise des conversions d'unités. Nous rappelons à ce sujet qu'aucun point ne peut être attribué à tout résultat numérique donné sans une unité correcte.

Les questions proches du cours (Q2 à Q4, Q10 et Q11, Q32) ont été très discriminantes et montrent une grande disparité de connaissance et de maîtrise du cours de physique. Nombreux sont les candidats qui manipulent des grandeurs et utilisent des termes physiques sans en connaître le sens. La méconnaissance de la signification du vecteur densité de courant thermique (Q10) ne peut pas conduire à établir un bilan de façon rigoureuse (Q12).

Les développements calculatoires restent une source de difficulté majeure pour les candidats : erreurs fréquentes de signe, absence de simplifications des expressions littérales, développements limités et manipulation des opérateurs vectoriels différentiels non maîtrisés, expressions littérales non homogènes... Les égalités entre scalaires et vecteurs restent répandues au cours d'un calcul.

Les efforts de soin, de lisibilité et de mise en valeur des résultats sont à poursuivre chez certains candidats. On observe, en particulier, beaucoup de ratures. Si

le texte est proprement barré et le raisonnement repris ensuite, cela ne pose pas de problèmes. Mais lorsque les ratures sont au milieu même du raisonnement, ou que le candidat écrit une réponse corrigée dans l'interligne, cela devient problématique. On rappelle qu'une réponse illisible ne peut donner lieu à l'attribution des points. Une autre tendance inverse est à éviter : celle de copies bien rédigées, mais dans lesquelles toute ligne de calcul est surlignée ou encadrée, toute réponse rédigée est soulignée. Cela n'aide en rien la correction, et fait perdre la notion même de hiérarchisation inhérente au fait de mettre en valeur certaines étapes d'un raisonnement.

Q10. Beaucoup trop de formulations approximatives à propos du sens physique du vecteur densité de courant thermique.

Q11. Le signe moins est souvent justifié par le fait que la chaleur diffuse vers l'extérieur. Des confusions avec la loi de Fick alors que l'expression de la loi est correcte.

Q12. Question délicate et technique du fait de la géométrie cylindrique et donc très peu réussie. On note dès le début du raisonnement des lacunes sur la méthode d'établissement d'un bilan local : le premier principe n'est que rarement mentionné, les transferts thermiques ne sont pas correctement explicités. De la malhonnêteté dans certaines copies avec un bilan qui conduit à  $\frac{d^2T}{d\rho^2} = 0$  et une

intégration qui malgré tout donne le résultat correct en  $\ln(\rho)$ .

Q13. Bien traitée lorsque la définition d'une résistance thermique est connue. Une expression du type  $L/\lambda S$  établie en cours pour une diffusion unidimensionnelle n'est pas une définition acceptable.

Q14. Question très simple et pourtant peu ou mal traitée avec des erreurs sur le volume d'un cylindre et des résultats numériques aberrants. Il fallait également comparer le résultat numérique trouvé à celui donné dans l'énoncé pour conclure.

Q15. Une réponse reposant sur le sens physique était acceptable si elle était clairement rédigée. Une application du premier principe en régime stationnaire conduisait aussi à la conclusion, mais il ne fallait pas oublier de définir le système. Q16. Beaucoup d'erreurs d'application numérique. L'association série des différentes résistances thermiques est souvent mal justifiée : il faut qu'elles soient traversées par un même flux thermique.

Q17. / Q18. Bien traitées.

Q19. Comme pour Q16., l'association parallèle des différentes résistances thermiques est souvent mal justifiée : il faut qu'elles soient soumises à une même différence de température. Beaucoup de candidats utilisent une expression erronée pour le calcul de la résistance équivalente.

Q20. Rarement correcte du fait des erreurs dans les questions précédentes.

Q21. Très peu de candidats conduisent une discussion complète du modèle. Il fallait tout d'abord constater l'adéquation en ordre de grandeur du modèle avec les expé-

riences menées par Caroline Gilbert, ce qui valide sa pertinence. Il fallait ensuite souligner un écart qui met en évidence les limites de ce modèle qu'on pouvait discuter à la lumière des questions précédentes. L'influence des paramètres (surface, coefficient d'échange  $h$ ) est ainsi trop rarement évoquée, une majorité de candidats se contentant de platitudes en évoquant les manchots qui « se réchauffent les uns les autres ».

## I Généralités

1.  $\vec{j}_{th}$  est le vecteur densité de courant thermique. La norme de  $\vec{j}_{th}$  est une puissance transférée (ou flux thermique) par unité de surface (en  $\text{W.m}^{-2}$ ).
2. La loi de FOURIER s'écrit :  $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ , soit  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$  d'après le formulaire pour un transfert purement radial.  
Le signe moins est lié au fait que le flux thermique va naturellement des zones chaudes vers les zones froides.
3. On effectue un bilan thermique entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , pour un système constitué par un cylindre creux de hauteur  $\ell$ , compris entre les rayons  $\rho$  et  $\rho + d\rho$ . D'après le premier principe :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \delta Q_e + \delta Q_c + \delta W$$

Le cylindre est indéformable donc  $W = 0$  et il n'y a pas de terme source (pas de métabolisme) donc  $\delta Q_c = 0$ . De plus, on est en régime stationnaire donc  $dU = 0$  par définition.

Le terme d'échange peut se décomposer en 2 termes :

$$0 = \delta Q_e = \delta Q_{\text{entrant en } \rho} - \delta Q_{\text{sortant en } \rho + d\rho}$$

$$\text{Soit, } 2\pi\rho\ell j_{th}(\rho) - 2\pi(\rho + d\rho)j_{th}(\rho + d\rho) = 0, \text{ ou } -2\pi\ell \frac{d\rho j_{th}(\rho)}{d\rho} = 0$$

On en déduit que le flux thermique est le même en  $\rho$  et en  $\rho + d\rho$ , c'est-à-dire qu'il est constant. On peut donc écrire :

$$2\pi\rho\ell \times \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = \Phi_0$$

Ceci se résume donc, en passant toutes les constantes à droite, à  $\rho \frac{dT}{d\rho} = A$  où  $A$  est une constante.

Par intégration (en passant  $\rho$  à droite), on obtient la forme du profil de température :

$$T(\rho) = A \ln \rho + B$$

On trouve les constantes  $A$  et  $B$  au moyen de 2 conditions aux limites en  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\begin{cases} A \ln R_1 + B = T_1 \\ A \ln R_2 + B = T_2 \end{cases}$$

En soustrayant ligne à ligne, il vient  $A = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)}$ . En reprenant la première ligne, on trouve  $B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln R_1$  et donc on obtient :

$$T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln \frac{\rho}{R_1} + T_1 ; \text{ OK}$$

4. Par définition,  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$  où  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est le flux thermique allant de 1 vers 2. Ici :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_0 = -2\pi\rho\ell\lambda \frac{\partial T}{\partial \rho} = -2\pi\rho\ell\lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{\rho}$$

On identifie donc, après simplification,

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi\ell\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} ; \text{ OK}$$

## II Détermination du mécanisme d'un manchot

5. Si le cylindre est homogène,  $m = \rho_e \times \pi R^2 \ell \Rightarrow R = \sqrt{\frac{m}{\pi \rho_e \ell}}$ .

AN :  $R \simeq 9$  cm ce qui est cohérent.

6. On reprend un bilan thermique (premier principe), mais cette fois pour un manchot dans son ensemble.

En régime stationnaire, on a toujours  $dU = 0$  et on néglige tout travail. On a donc  $\delta Q_e + \delta Q_c = 0$ . Or  $\delta Q_e = -\Phi_{th} dt$  ( $\Phi_{th}$  flux sortant) et  $\delta Q_c = \mathcal{P}_m dt$  donc

$$\Phi_{th} = \mathcal{P}_m.$$

7. Le flux thermique sortant traverse successivement les différentes couches qui sont donc **en série**. On peut donc sommer les résistances (qualitativement, les couches se superposent et la résistance thermique augmente d'autant). Ainsi :

$$R_{th,1} = \frac{1}{2\pi\ell} \left[ \frac{1}{\lambda_g} \ln \frac{R + e_g}{R} + \frac{1}{\lambda_a} \ln \frac{R + e_g + e_a}{R + e_g} + \frac{1}{\lambda_p} \ln \frac{R + e_g + e_a + e_p}{R + e_g + e_a} \right]$$

AN :  $R_{th,1} = 1,07 \text{ K.W}^{-1}$ .

8. Le flux conducto-convectif est l'intégrale de  $\vec{j}_{th,cc}$  sur la surface d'aire  $S$ , soit  $\Phi_{th,cc} = Sh(T_p - T_e)$ . D'après la définition de la résistance thermique, on a donc

$$R_{th,cc} = \frac{1}{hS}.$$

9. Un raisonnement identique amène à

$$R_r = \frac{1}{4\sigma T_e^3 S}.$$

10. Les pertes par flux conducto-convectif et par rayonnement se cumulent, pour un même écart de température entre le plumage et l'extérieur. Les résistances thermiques sont donc **en parallèle** (en dérivation) et donc :

$$R_{th,2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{th,cc}} + \frac{1}{R_r}} = \frac{1}{hS + 4\sigma T_e^3 S}$$

AN :  $R_{th,2} = 0,03 \text{ K.W}^{-1}$  en prenant pour  $S$  la surface latérale du cylindre de hauteur  $\ell$  et de rayon  $R + e_g + e_a + e_p$ .

11. À nouveau, le flux traversant  $R_{th,2}$  est celui ayant traversé toutes les couches internes, donc  $R_{th,1}$  et  $R_{th,2}$  sont **en série**, ce qui donne

$$R_{th,tot} = R_{th,1} + R_{th,2}.$$

AN :  $R_{th,tot} = 1,10 \text{ K.W}^{-1}$ .

On en déduit  $\mathcal{P}_m = \Phi_{th} = \frac{T_i - T_e}{R_{th,tot}}$ .

AN :  $\mathcal{P}_m = 50 \text{ W}$ , en accord avec l'énoncé.

12. Tout d'abord, on constate que la puissance  $\mathcal{P}_m$  a été un peu sous-estimée, même si l'ordre de grandeur est le bon (85 W pour un individu isolé).

Par ailleurs, le fait que les manchots se regroupent tend à faire baisser leurs besoins énergétiques (on parle de thermorégulation sociale) : d'après le tableau, plus le groupe est important, plus la puissance due au métabolisme nécessaire à maintenir leur température corporelle est faible. Ceci s'explique physiquement en considérant que lorsque le groupe s'agrandit, le nombre de manchots à la périphérie (donc la surface de contact avec l'extérieur, et donc le flux thermique perdu) croît moins vite que le nombre de manchots total (donc que la puissance produite).

Schématiquement, on peut considérer que seuls les manchots à la périphérie sont au contact du froid, les autres étant protégés et ont donc peu de besoins énergétiques. Plus précisément, leur métabolisme sert à réchauffer leurs voisins et n'est pas perdu à l'extérieur du groupe.

## Troisième partie

# À propos du nucléaire militaire

## I La désintégration de l'uranium 235

### I.1 Diffusion de neutrons

1.  $E_1 = 170.10^6 \text{ eV}$  étant l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'uranium 235, l'énergie libérée par la désintégration de  $m = 1 \text{ kg}$  d'uranium 235 est

$$E_{1\text{kg}} = N E_1$$

où  $N$  est le nombre d'atomes dans la masse  $m$ , soit, en appelant  $M_U$  la masse atomique de l'uranium 235 et  $\mathcal{N}_A$  le nombre d'Avogadro :  $N = \mathcal{N}_A \frac{m}{M_U}$ .

Il vient

$$E_{1\text{kg}} = \mathcal{N}_A \frac{m}{M_U} E_1.$$

À défaut d'indication, on prend comme valeur approchée  $M_U \simeq 235 \text{ g.mol}^{-1}$ . On obtient :  $\underline{E_1 \text{ kg} = 6,96.10^{13} \text{ J}}$ .

2. C'est l'équivalent de 17.10<sup>3</sup> tonnes de TNT. Les énergies mises en jeu dans les réactions nucléaires sont beaucoup plus grandes que dans les réactions chimiques.

3. On a

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_N + \frac{\nu - 1}{\tau} N(x, y, z, t).$$

- (a) Le premier terme correspond au transport diffusif des neutrons. Le second terme est un
- (b)  $\tau$  est le temps caractéristique du processus de fission.
- (c) Le terme de production est proportionnel à  $\nu - 1$ , car un neutron est absorbé et  $\nu$  neutrons libérés, soit un gain de  $\nu - 1$  neutrons pour chaque noyau désintégré.

## I.2 Masse critique

1.

(a) Calculons les dérivées de  $g$ ; on obtient

$$\begin{cases} \frac{dg}{dr} = \frac{d}{dr}(rN_1) = r \frac{dN_1}{dr} + N_1 \\ \frac{d^2g}{dr^2} = r \frac{d^2N_1}{dr^2} + 2 \frac{dN_1}{dr} \end{cases}$$

or

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dN_1}{dr} \right) = 2r \frac{dN_1}{dr} + r^2 \frac{d^2N_1}{dr^2}$$

donc

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dN_1}{dr} \right) = r \frac{d^2g}{dr^2} \text{ soit } \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{D}{r} \frac{d^2g}{dr^2} e^{\nu' t/\tau}$$

L'équation fondamentale de la neutronique

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J} + \left( \frac{\nu - 1}{\tau} \right) N$$

devient, avec

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{D}{r} \frac{d^2g}{dr^2} e^{\nu' t/\tau} \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\nu' g}{\tau} e^{\nu' t/\tau} \\ \left( \frac{\nu - 1}{\tau} \right) N = \left( \frac{\nu - 1}{\tau} \right) \frac{g}{r} e^{\nu' t/\tau} \end{cases}$$

une équation en  $g$  :

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} g = 0$$

En posant,  $\alpha^2 = \left| \frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau} \right|$ , il vient :

$$\boxed{\frac{d^2g}{dr^2} \pm \alpha^2 g = 0}$$

(b) Pour que  $N_1$  satisfasse les conditions imposées,  $g$  doit s'annuler en  $O$  et en  $R$ , mais ne pas s'annuler entre ces deux valeurs. La forme de la solution dépend du signe du coefficient  $\frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau}$ .

—  $\frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} < 0$ ; l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2g}{dr^2} - \alpha^2 g = 0$$

la solution générale est de la forme

$$g = Ae^{\alpha r} + Be^{-\alpha r}$$

Les conditions imposées à  $g$  donnent

$$0 = A + B \text{ et } 0 = Ae^{\alpha R} + Be^{-\alpha R}$$

La seule solution est la solution triviale  $g = 0$ , qui est donc écartée.

—  $\frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} = 0$ ; l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2g}{dr^2} = 0$$

la solution générale est de la forme

$$g = Ar + B$$

Les conditions imposées à  $g$  donnent

$$0 = B \text{ et } 0 = AR + B$$

La seule solution est à nouveau la solution triviale  $g = 0$ , qui est donc écartée.

—  $\frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} > 0$ ; l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \alpha^2 g = 0$$

la solution générale est de la forme

$$g = A \cos \alpha r + B \sin \alpha r$$

Les conditions imposées à  $g$  donnent

$$0 = A \text{ et } 0 = A \cos \alpha R + B \sin \alpha R$$

On peut donc avoir une solution non triviale

$$g = B \sin \alpha r$$

à condition d'avoir  $\sin \alpha R = 0$ , soit  $\alpha R = p\pi$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$ .  $p$  et  $-p$  correspondent à la même solution ;  $p = 0$  conduit à nouveau à la solution triviale  $g = 0$ , qui est donc écartée ;  $p > 1$  conduit à des solutions qui s'annulent entre 0 et  $R$ , qui sont donc également écartées. Finalement, on retient uniquement  $p = 1$ , soit

$$\frac{\nu - 1 - \nu'}{D\tau} = \frac{\pi^2}{R^2}$$

conformément à l'énoncé.

- (c) Quand  $\nu'$  augmente, la divergence de  $N$  devient plus rapide. On peut comprendre que la divergence de  $N$  devient plus rapide quand  $R$  augmente. En effet, les neutrons sont perdus lorsqu'ils atteignent la frontière de la boule, dont l'aire croît en  $R^2$  tandis que le nombre de neutrons produits est proportionnel à  $R^3$ . Le nombre de neutrons produits augmente donc plus vite que le nombre de neutrons perdus.
- (d) Si  $\nu' > 0$ , la réaction nucléaire s'emballe, tandis qu'elle s'étouffe si  $\nu' < 0$ .
- (e) Le cas limite correspond à

$$0 = \nu - 1 - \frac{\pi^2 D\tau}{R_c^2}$$

soit

$$R_c = \pi \sqrt{\frac{D\tau}{\nu - 1}}$$

- (f) Numériquement, il y a réaction en chaîne pour

$$R > R_c = 0,12 \text{ m}$$

soit pour une masse

$$M > M_c = 141 \text{ kg}$$

## II Principe de la séparation isotopique par diffusion gazeuse

### II.1 Diffusion gazeuse à travers une petite ouverture

1.

- (a) On a, pour un GPM  $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{3}{2}k_B T$ . Pour un GP polyatomique

$$V \simeq \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- (b) Soit  $\delta N$ , le nombre de molécules qui traversent l'orifice entre  $t$  et  $t + dt$ . À l'instant  $t$  ces molécules sont contenues dans le cylindre de base  $S$  et de hauteur  $Vdt$ . Parmi toutes ces molécules, seul  $1/6$  correspond à des molécules se dirigeant vers l'orifice. On en déduit

$$\delta N = \frac{n}{6} S V dt$$

avec  $n$  la densité moléculaire. Or d'après l'équation d'état des gaz parfait,  $P = nk_B T$ . on en déduit que

$$\frac{\delta N_{235}}{\delta N_{238}} = \frac{n_{235}}{n_{238}} \times \frac{V_{235}}{V_{238}} = \frac{P_{235}}{P_{238}} \times \left( \frac{V_{235}^2}{V_{238}^2} \right)^{1/2}$$

Or  $V^2 \propto \frac{k_B T}{m}$  et  $m = \frac{M}{N_A}$  :

$$\frac{\delta N_{235}}{\delta N_{238}} = \frac{P_{235}}{P_{238}} \times \left( \frac{M_{238}}{M_{235}} \right)^{1/2}$$

ce qui donne l'expression de l'énoncé, avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = -1$$

- (c) On a simplement

$$\frac{J_{235}}{J_{238}} = \frac{P_{235}}{P_{238}} \times \left( \frac{M_{238}}{M_{235}} \right)^{1/2}$$

soit, numériquement

$$\frac{J_{235}}{J_{238}} = \frac{7.10^{-3}}{993.10^{-3}} \times \sqrt{\frac{352}{349}} = 7,08.10^{-3}$$

- (d) Le fluor étant plus léger que le chlore, le phénomène est plus discriminant pour l'hexafluorure que pour l'hexachlorure.

## II.2 Mise en cascade de cellules de diffusion gazeuse

1. En entrée de la première cellule, on a  $r_{235,0} = \frac{P_{235}}{P_{238}}$  ; à la sortie de cette cellule, on a

$$r_{235,1} = \frac{J_{235}}{J_{238}} = r_{235,0} \times \left( \frac{M_{238}}{M_{235}} \right)^{1/2}$$

2.

- (a) La suite des  $r_{235,n}$  est une suite géométrique de raison  $q = \left( \frac{M_{238}}{M_{235}} \right)^{1/2}$ . Pour obtenir de l'uranium civil, le nombre de cellules est  $n_c$  tel que

$$r_{235,n_c} = r_{235,0} q^{n_c}$$

soit

$$n_c = \frac{\ln \frac{r_{235,n_c}}{r_{235,0}}}{\ln q} = 340$$

- (b) Pour obtenir de l'uranium militaire, le nombre de cellules est  $n_m$  tel que

$$r_{235,n_b} = r_{235,0} q^{n_m}$$

soit

$$n_m = \frac{\ln \frac{r_{235,n_m}}{r_{235,0}}}{\ln q} = 1135$$

3. On peut envisager une séparation par centrifugation, ou par ionisation et application de forces électromagnétiques.