

Question de cours : OPPS transverse électromagnétique dans un plasma

Modèle de l'OPPS. Modèle du plasma dilué. Expression de la conductivité complexe du plasma. Pulsation de coupure. Caractéristiques des ondes selon la pulsation.

Exercice : lame à retard ; analyseur à pénombre

On considère une lame cristalline limitée par les plans d'équations $z = 0$ et $z = e$. Cette lame est biréfringente ; on note n_x l'indice de réfraction relatif à la composante du champ selon le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ et n_y l'indice de réfraction relatif à la composante du champ selon le vecteur unitaire $\vec{e}_y$. On suppose $n_y > n_x$.

1. On envoie sur cette lame une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement se propageant selon $\vec{e}_z$.

a) Donner l'expression générale du champ électrique $\vec{E}(z, t)$ de cette onde dans la région $z < 0$.

b) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(z, t)$ correspondant.

2. Déterminer la polarisation de l'onde transmise dans la lame.

3. Principe d'un analyseur à pénombre.

a) Entre un polariseur et un analyseur on dispose une lame demi-onde pour la longueur d'onde considérée de sorte que la moitié seulement du faisceau incident traverse la lame. On observe ainsi à la sortie du dispositif un disque lumineux comportant deux plages lumineuses. Montrer qu'il existe, lorsqu'on fait tourner l'analyseur autour d'un axe perpendiculaire à son plan, deux positions de l'analyseur pour lesquelles les plages ont même éclairement.

b) L'analyseur ayant celle des deux positions précédentes pour lesquelles les éclaircissements sont les plus faibles, on interpose entre la lame demi-onde et l'analyseur une lame de quartz convenablement taillée. On observe alors que l'égalité des éclaircissements des plages n'est plus réalisée. Pour restituer cette égalité, telle qu'on l'observait avant la lame de quartz, on constate qu'il faut tourner l'analyseur d'un angle α . Interpréter le résultat. Qu'observerait-t-on si on plaçait la lame de quartz entre le polariseur et la lame demi-onde ?

Exercice : lame à retard ; analyseur à pénombre

1. a) Le champ électrique incident est de la forme $\vec{E} = E_1 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_2 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$

b) $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = -\frac{E_2}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{E_1}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$

2. a) A la sortie de la lame

$$\vec{E}' = E_1 \cos(\omega t - n_x k e) \vec{e}_x + E_2 \cos(\omega t - n_y k e) \vec{e}_y$$

Ce champ correspond en général à une polarisation elliptique.

b) Les lames demi-onde et quart d'onde correspondent à des valeurs remarquables des déphasages induits par la traversée de la lame.

— Lame demi-onde : $(n_y - n_x) k e = \pi$ soit $(n_y - n_x) e = \frac{\lambda}{2}$

— Lame quart d'onde : $(n_y - n_x) k e = \frac{\pi}{2}$ soit $(n_y - n_x) e = \frac{\lambda}{4}$



3. a) Soit θ l'angle entre le polariseur et l'analyseur. Sur la plage qui ne traverse pas la lame demi-onde, l'intensité lumineuse est

$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta$$

Soit φ l'angle entre le polariseur et l'axe rapide de la lame demi-onde. A la sortie de la lame demi-onde, l'angle entre la direction de polarisation et l'axe rapide de la lame demi-onde devient $-\varphi$; l'angle entre la direction de polarisation et celle de l'analyseur devient $\theta' = \theta - 2\varphi$; sur la plage qui traverse la lame demi-onde, l'intensité lumineuse est

$$I_2 = I_0 \cos^2(\theta - 2\varphi)$$

Il y a égalité d'éclairement sur les deux plages lorsque

$$\cos^2 \theta = \cos^2(\theta - 2\varphi)$$

ce qui est équivalent à

$$\cos 2\theta = \cos 2(\theta - 2\varphi)$$

soit

$$\begin{cases} 2\theta = 2\theta - 4\varphi & [2\pi] \text{ pas de solution si } \vec{\varphi} \neq 0 & [\pi/2] \\ 2\theta = -2\theta + 4\varphi & [2\pi] \text{ 4 solutions } \theta = \varphi & [\pi/2] \end{cases}$$

On écarte le cas $\varphi = 0 \quad [\pi/2]$, sans intérêt, puisque la lame demi-onde ne sert à rien !
Les 4 solutions obtenues dans l'autre cas ne représentent que 2 positions relatives distinctes (deux positions différant d'un angle π sont physiquement identiques :

$$\begin{cases} \theta = \varphi \\ \theta = \varphi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'oeil étant le plus sensible à une égalité d'éclairement en faible intensité, on choisit une solution pour laquelle θ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, ce qui conduit à prendre un angle φ non nul, mais très petit devant $\pi/2$. Dans ces conditions, l'éclairement des plages est, pour $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} I_1 = I_0 \cos^2 \theta = I_0 \sin^2 \varphi \ll I_0 \\ I_2 = I_0 \cos^2(\theta - 2\varphi) = I_0 \sin^2 \varphi \end{cases}$$

tandis que, pour $\theta = \varphi$

$$\begin{cases} I_1 = I_0 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2 \varphi \simeq I_0 \\ I_2 = I_0 \cos^2(\theta - 2\varphi) = I_0 \cos^2 \varphi \end{cases}$$

On a égalité d'éclairement dans les deux cas, mais seul le premier est une égalité de pénombre.

b) Le quartz possède un pouvoir rotatoire : il induit une rotation du champ $\vec{E}$ d'un angle α qu'il faut compenser par une même rotation de l'analyseur.

L'optimisation φ non nul, mais très petit devant $\pi/2$ n'est plus réalisée si on place la lame de quarté entre le polariseur et la lame demi-onde.

Question de cours : OPPS transverse électromagnétique dans un plasma

Modèle de l'OPPS. Modèle du plasma dilué. Expression de la conductivité complexe du plasma. Pulsation de coupure. Caractéristiques des ondes selon la pulsation.

.1 Câble coaxial

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs cylindriques de même axe Oz . Le premier est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et de rayon extérieur R_3 , appelé la gaine du conducteur.

On considère le câble comme infini suivant l'axe Oz . Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, constituée d'un isolant mais qu'on assimilera à du vide du point de vue de ses propriétés électromagnétique. Cette onde est définie en notation complexe par son champ électrique :

$$\vec{E}(r, z, t) = \frac{\alpha}{r} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_r$$

où α est une constante réelle positive.

1. L'onde est-elle plane ? Est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
2. On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser l'unité de E_0 et exprimer $\vec{E}(r, z, t)$ en fonction de E_0 , r , z , t , k et R_1 .
3. À partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation de dispersion liant k et ω . Le milieu est-il dispersif ?
4. Déterminer en fonction de E_0 , r , t , ω , k et R_1 , l'expression du champ magnétique complexe $\vec{B}(r, z, t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.
5. On désigne par $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de $\vec{\Pi}$ en fonction de E_0 , R_1 , r , k , ω , z , t et μ_0 .

6. Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P , par le câble en fonction de E_0 , R_1 , R_2 , c et μ_0 . Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W. On prendra : $R_1 = 0,25$ mm et $R_2 = 1,25$ mm.

Données : On donne les opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

et

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

Question de cours : OPPS transverse électromagnétique dans un plasma

Modèle de l'OPPS. Modèle du plasma dilué. Expression de la conductivité complexe du plasma. Pulsation de coupure. Caractéristiques des ondes selon la pulsation.

Exercice : Représentation de Jones des états de polarisation

Un état de polarisation d'une onde plane sinusoïdale qui se propage le long de l'axe Oz est entièrement caractérisé par la donnée de deux composantes du champ électrique dans le plan d'onde.

Le champ

$$\vec{E} = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_x + A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \vec{e}_y$$

a pour amplitude complexe

$$\vec{\mathcal{E}} = A_x e^{j\varphi_x} \vec{e}_x + A_y e^{j\varphi_y} \vec{e}_y$$

Cet état est représenté, selon une notation due à Jones, par une matrice colonne dont les deux lignes sont proportionnelles aux amplitudes complexes du champ électrique :

$\begin{bmatrix} A_x e^{j\varphi_x} \\ A_y e^{j\varphi_y} \end{bmatrix}$ où A_x et A_y sont réels. Il peut être commode de normaliser la matrice précédente et de manipuler des matrices du type $\frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{bmatrix} A_x e^{j\varphi_x} \\ A_y e^{j\varphi_y} \end{bmatrix}$

1. Quelle est la signification physique de $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ et de $\varphi_y - \varphi_x$?

2. Que représentent les états suivants :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} ?$$

3. On superpose les états $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$ sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Décrire physiquement les trois états représentés ci-dessus et justifier la règle d'addition.

4. Les dispositifs (polariseurs, lame à retard...) qui agissent sur un état de polarisation sont ainsi représentés par des matrices 2×2 à éléments complexes. Identifier les dispositifs associés aux matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}.$$

1. $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ n'est pas la norme de $\vec{E}$, mais la longueur de la demi-diagonale du rectangle dans lequel est inscrite l'ellipse parcourue la l'extrémité du vecteur représentatif de $\vec{E}$. Ce n'est que dans le cas d'une polarisation rectiligne, que $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ représente la valeur maximale de la norme de $\vec{E}$.

$\varphi_y - \varphi_x$ est le déphasage entre les deux composantes de $\vec{E}$.

2.

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ représente un état de polarisation rectiligne selon Ox .
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ représente un état de polarisation rectiligne selon Oy .
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ représente un état de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_x + \vec{e}_y$.
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ représente un état de polarisation circulaire. Pour en préciser le sens, on peut l'écrire sous la forme $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\pi/2} \end{bmatrix}$ et en déduire que le champ électrique correspondant est

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \cos(\omega t - kz + \pi/2) \vec{e}_y \\ &= E_0 (\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y) \end{aligned}$$

On obtient un vecteur tournant dans le sens horaire ; la polarisation est donc circulaire droite.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$ représente un état de polarisation circulaire gauche.

3. Si la règle d'addition des champs se transpose aux matrices de Jones, cela signifie que la somme d'un état polarisé circulaire droit et d'un état polarisé circulaire gauche de même amplitude conduit à un état de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_x$.

Vérifions-le en additionnant les champs réels correspondants :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 (\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y) \\ &\quad + E_0 (\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y) \\ &= 2E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \end{aligned}$$

La règle d'addition est satisfaite.

4. Pour déterminer la fonction des dispositifs proposés, effectuons le produit de la matrice de Jones $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ d'un état quelconque par la matrice de chaque opérateur ; on obtient

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ Le dispositif est un polariseur rectiligne selon $\vec{e}_x$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$ Le dispositif est une lame demi-onde.
- $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}$ Le dispositif est un polariseur rectiligne selon $\vec{e}_x + \vec{e}_y$.
- $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}$ Le dispositif est un polariseur rectiligne selon $\vec{e}_x - \vec{e}_y$.
- $\begin{bmatrix} e^{-j\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^{-j\frac{\varphi}{2}} \\ \beta e^{j\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$ Le dispositif est une lame à retard de φ .
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ j\beta \end{bmatrix}$ Le dispositif est une lame à retard de $\frac{\pi}{2}$ (lame quart d'onde).

Question de cours : OPPS dans un conducteur ohmique

Modèle de l'OPPS. Modèle de Drüde du conducteur ohmique. Expression de la conductivité. ARQS magnétique. Relation de dispersion. Effet de peau.

Exercice : Mode TE entre deux plans conducteurs

On considère deux plans parfaitement conducteurs P et P' infinis, parallèles, d'équations respectives $x = \pm d/2$. On étudie une onde électromagnétique progressive, monochromatique, se propageant dans le vide entre ces deux plans suivant la direction de Oz , et telle que son champ électrique reste parallèle aux deux plans. On posera que celui-ci est de la forme :

$$\vec{E} = E(x) \exp[j(\omega t - kz)] \vec{e}_y.$$

1. Écrire l'équation de Maxwell-Faraday en représentation complexe. En déduire la forme du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de t, x, z . Est-il transversal ? Justifier l'expression "onde transversale électrique (T.E.)".

2. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$.

3. Résoudre cette équation différentielle, suivant le signe de $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$. Montrer qu'il n'y a de propagation possible que si la pulsation de l'onde est supérieure à une valeur que l'on déterminera. Calculer alors la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde.

4. Pour une fréquence donnée, on ne considère plus que le mode dont le vecteur d'onde a la plus grande module. Déterminer les valeurs moyennes du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie électromagnétique entre P et P' . Calculer le flux énergétique moyen à travers une surface perpendiculaire à Oz et de largeur h dans la direction de Oy . Calculer l'énergie électromagnétique localisée en moyenne dans une tranche d'épaisseur dz , limitée par deux surfaces telles que S . En déduire la vitesse v_e de propagation de l'énergie moyenne et la comparer à la vitesse de groupe.

1. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

soit, en représentation complexe

$$e^{j(\omega t - kz)} (E'(x) \vec{e}_z + jkE(x) \vec{e}_x) = -j\omega \vec{B}$$

On en déduit

$$\vec{B} = e^{j(\omega t - kz)} \left(\frac{j}{\omega} E'(x) \vec{e}_z - \frac{k}{\omega} E(x) \vec{e}_x \right)$$

2. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit, en représentation complexe

$$e^{j(\omega t - kz)} \left(-\frac{j}{\omega} E''(x) + \frac{jk^2}{\omega} \right) \vec{e}_y = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

On en déduit

$$E''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0$$

3.

- si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$, on pose

$$\frac{1}{\lambda^2} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

Le champ électrique est solution de

$$E''(x) - \frac{1}{\lambda^2} E(x) = 0$$

La solution générale est

$$E(x) = Ae^{x/\lambda} + Be^{-x/\lambda}$$

Les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} Ae^{d/2\lambda} + Be^{-d/2\lambda} = 0 \\ Ae^{-d/2\lambda} + Be^{d/2\lambda} = 0 \end{cases}$$

La seule solution est la solution triviale $E(x) = 0$.

- si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$, le champ électrique est solution de

$$E''(x) = 0$$

La solution générale est

$$E(x) = Ax + B$$

Les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} A\frac{d}{2} + B = 0 \\ -A\frac{d}{2} + B = 0 \end{cases}$$

La seule solution est à nouveau la solution triviale $E(x) = 0$.

- si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$, on pose

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

Le champ électrique est solution de

$$E''(x) + K^2 E(x) = 0$$

La solution générale est

$$E(x) = A \cos Kx + B \sin Kx$$

Les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} A \cos Kd/2 + B \sin Kd/2 = 0 \\ A \cos Kd/2 - B \sin Kd/2 = 0 \end{cases}$$

On obtient une solution non triviale pour

$$\begin{vmatrix} \cos Kd/2 & \sin Kd/2 \\ \cos Kd/2 & -\sin Kd/2 \end{vmatrix} = 0 \text{ soit } \sin Kd = 0$$

On a alors $K = \frac{n\pi}{d}$ soit

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La vitesse de phase est alors

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{d^2 \omega^2}}}$$

tandis que la vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{d^2 \omega^2}}$$

4. Dans le mode $n = 1$, les champs sont, en notation réelle :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos \frac{\pi x}{d} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \\ \vec{B} = -\frac{kE_0}{\omega} \left(\cos \frac{\pi x}{d} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - \frac{\pi}{kd} \sin \frac{\pi x}{d} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z \right) \end{cases}$$

Le vecteur de Poynting moyen est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega} \cos^2 \frac{\pi x}{d} \vec{e}_z$$

La puissance rayonnée à travers une surface perpendiculaire à Oz et de largeur h dans la direction de Oy est

$$\mathcal{P} = h \int_{-d/2}^{d/2} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_y dx = \frac{kE_0^2 h d}{4\mu_0\omega}$$

L'énergie électromagnétique localisée en moyenne dans une tranche d'épaisseur dz , limitée par deux surfaces telles que S est

$$dU = h dz \int_{-d/2}^{d/2} \langle u \rangle dy$$

avec

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \frac{\pi x}{d} + \frac{E_0^2 k^2}{4\mu_0 \omega^2} \left(\cos^2 \frac{\pi x}{d} + \frac{\pi^2}{k^2 d^2} \sin^2 \frac{\pi x}{d} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} dU &= h dz \left(\frac{1}{8} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2 k^2}{8\mu_0 \omega^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{k^2 d^2} \right) \right) \\ &= h dz \left(\frac{1}{8} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{8\mu_0 \omega^2} \left(k^2 + \frac{\pi^2}{d^2} \right) \right) \\ &= h dz \left(\frac{1}{8} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{8\mu_0 \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \right) \\ &= h dz \left(\frac{1}{8} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{E_0^2}{8\mu_0 c^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 h dz \end{aligned}$$

Pour $dz = v_e dt$, on a $dU = \mathcal{P} dt$; on en déduit

$$\frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 h v_e dt = \frac{k E_0^2 h d}{4 \mu_0 \omega} dt$$

soit

$$v_e = \frac{k}{\omega \epsilon_0 \mu_0} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

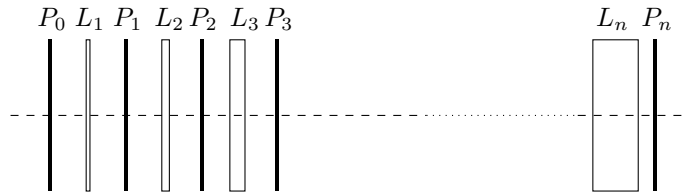
La vitesse de transport de l'énergie est égale à la vitesse de groupe.

Question de cours : OPPS dans un conducteur ohmique

Modèle de l'onde. Modèle du conducteur ohmique. Expression de la conductivité. ARQS magnétique. Relation de dispersion. Effet de peau.

Exercice : Filtre de Lyot

On réalise le montage de la figure ci-dessous, dans lequel P_0, P_1, P_n sont des polarisoirs parallèles, L_1, L_2, L_n sont des lames biréfringentes ; les axes rapides de ces lames sont tous parallèles et orientés à 45° de la direction privilégiée des polarisoirs. On rappelle que pour une lame biréfringente perpendiculaire à la direction de la lumière Oz , deux ondes électromagnétiques polarisées suivant les axes x et y se propagent avec les indices respectifs n_x et n_y . Les épaisseurs respectives de ces lames taillées dans le même matériau sont $e, 2e, 2^{n-1}e$. La lame L_1 introduit entre deux ondes polarisées suivant ses lignes neutres le déphasage ϕ . Le système est éclairé en lumière blanche naturelle.



1. Exprimer ϕ en fonction de la longueur d'onde λ , de la biréfringence $\Delta n = |n_x - n_y|$ de la lame et de son épaisseur e .
2. Exprimer l'intensité I transmise par le système en fonction de ϕ et de l'intensité I_0 transmise par le polariseur P_0 . On négligera l'absorption due aux traversées des lames.
3. Déterminer la position des maxima principaux et montrer que les maxima secondaires correspondent à une intensité négligeable. Donner l'allure de la courbe $\phi \rightarrow I(\phi)$. Pourquoi ce dispositif peut-il être qualifié de monochromateur ?
4. Traiter le cas particulier de quatre lames, avec $e = 250 \mu\text{m}$, $\Delta n = 0,01$. Calculer les longueurs d'onde transmises dans le visible en supposant la biréfringence Δn indépendante de la longueur d'onde.

Exercice : Filtre de Lyot

$$1. \phi = \frac{2\pi\Delta ne}{\lambda}.$$

2. A la sortie de L_1 , on a

$$\vec{E}_1 = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \omega t \vec{e}_x + \cos(\omega t - \phi) \vec{e}_y)$$

A la sortie de P_1 , on a

$$\left(\vec{E}_1 \cdot \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) = \frac{E_0}{2} (\cos \omega t + \cos(\omega t - \phi)) \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_0} &= \frac{1}{2} \langle (\cos \omega t + \cos(\omega t - \phi))^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2 \langle \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos \phi) \\ &= \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{I_k}{I_{k-1}} = \cos^2 \frac{\phi_k}{2}$$

avec

$$\phi_k = 2^{k-1} \phi$$

On a donc

$$I_n = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \times \cos^2 \frac{2\phi}{2} \times \cos^2 \frac{4\phi}{2} \times \dots \times \cos^2 \frac{2^{n-1}\phi}{2}$$

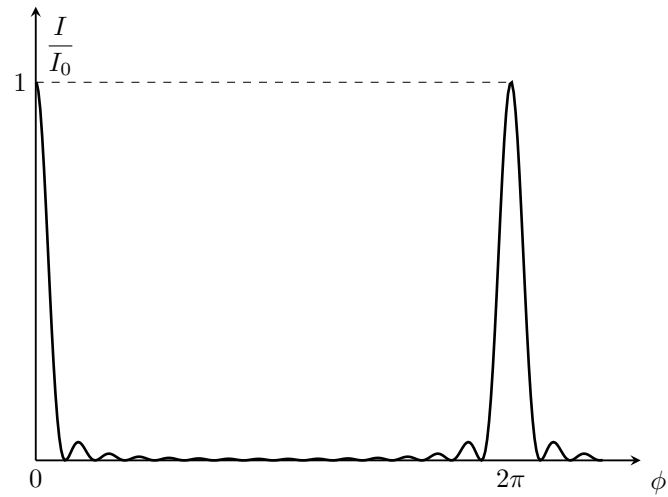
or

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{\sin \phi}{2 \sin \frac{\phi}{2}}; \cos \frac{2\phi}{2} = \frac{\sin 2\phi}{2 \sin \phi}; \cos \frac{4\phi}{2} = \frac{\sin 4\phi}{2 \sin 2\phi}; \dots$$

donc

$$I_n = I_0 \left(\frac{\sin(2^{n-1}\phi)}{2^n \sin \frac{\phi}{2}} \right)^2$$

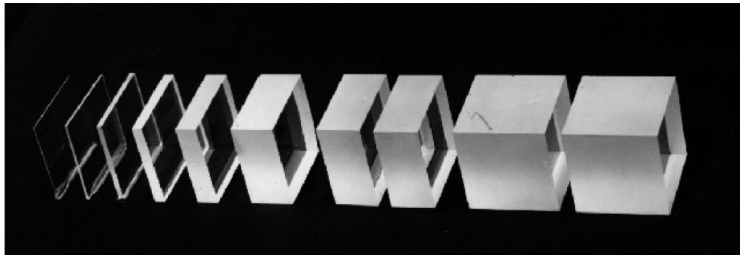
On obtient une fonction réseau.



Le dispositif peut être qualifié de monochromateur car seule une fréquence telle que $\phi = k2\pi$ est transmise en pratique.

4. Dans le visible, on obtient

- $\lambda_4 = 0,625 \mu\text{m}$: rouge
- $\lambda_5 = 0,500 \mu\text{m}$: vert
- λ



blocs de spat d'un filtre de LYOT

Question de cours : Réflexion et transmission d'une OPPS sous incidence normale

Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique polarisée rectilignement à l'interface entre deux milieux d'indices complexes $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ dans le cas d'une incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.

Exercice : Onde électromagnétique non plane (Onde de type T.M.)

On considère le champ de vecteurs

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_y + \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_z.$$

1. a) Quelles relations doivent vérifier α et k pour que ce champ $\vec{E}$ soit un champ électrique ?

b) Quelle est la vitesse de phase v_φ de l'onde ?

2. Déterminer le champ magnétique associé $\vec{B}$.

3. a) Déterminer la valeur moyenne au cours du temps du vecteur de Poynting.

b) Calculer la puissance moyenne qui traverse un plan $z = \text{Cte}$ limité par $x = \pm a$ et $y = \pm a$.

4. Calculer la densité volumique moyenne $\langle u \rangle$ d'énergie électromagnétique. Calculer l'énergie électromagnétique moyenne contenue dans le volume limité par $x = \pm a$, $y = \pm a$ et $z = \ell$.

5. a) Dédire des résultats précédents la vitesse de propagation de l'énergie v_e .

b) La comparer à la vitesse de groupe v_g .

c) Comparer v_φ et v_e à la célérité de la lumière dans le vide.

6. a) Montrer que cette onde satisfait aux conditions aux limites imposées par deux plans conducteurs parfaits, indéfinis, parallèles à xOz et situés en $y_1 = na$ et $y_2 = -na$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

b) Déterminer les courants superficiels induits sur ces plans.

Correction : Onde électromagnétique non plane (Onde de type T.M.)

1. a) En dehors des sources, le champ doit vérifier les équations

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -\frac{\pi^2}{a^2} + \alpha i k = 0 \\ -\frac{\pi^2}{a^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \end{cases}$$

b) La vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

2. L'équation de Maxwell-Faraday donne

$$\begin{aligned} i\omega \vec{B} &= \text{rot } \vec{E} \\ &= E_0 \left(\alpha \frac{\pi}{a} - ik \right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_x \\ &= E_0 \left(-i \frac{\pi^2}{ka^2} - ik \right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_x \\ &= i \frac{E_0}{k} \left(-\frac{\pi^2}{a^2} - k^2 \right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_x \\ &= -i \frac{E_0}{k} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_x \end{aligned}$$

soit

$$\vec{B} = -\frac{E_0 \omega}{kc^2} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}_x$$

3. a) Les champs réels sont

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kz - \omega t) \vec{e}_y \\ \quad + \frac{\pi}{ka} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(kz - \omega t) \vec{e}_z \\ \vec{B} = -\frac{E_0 \omega}{kc^2} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x \end{cases}$$

Le vecteur de Poynting est

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{E_0^2 \omega}{\mu_0 k c^2} \left[\cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(kz - \omega t) \vec{e}_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{ka} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kz - \omega t) \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

Sa valeur moyenne est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 \omega}{2\mu_0 k c^2} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{a} \right) \vec{e}_z$$

b) La puissance moyenne qui traverse un plan $z = \text{Cte}$ limité par $x = \pm a$ et $y = \pm a$ est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_{x=-a}^a \int_{y=-a}^a \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_z dx dy = \frac{E_0^2 \omega}{\mu_0 k c^2} a^2$$

4. La densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique est

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle + \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi^2}{k^2 a^2} \sin^2 \frac{\pi y}{a} \right) + \frac{E_0^2 \omega^2}{4\mu_0 k^2 c^4} \cos^2 \frac{\pi y}{a} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi^2}{k^2 a^2} \sin^2 \frac{\pi y}{a} \right) + \frac{\epsilon_0 E_0^2 \omega^2}{4k^2 c^2} \cos^2 \frac{\pi y}{a} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi^2}{k^2 a^2} \sin^2 \frac{\pi y}{a} \right) + \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{\pi^2}{k^2 a^2} \right) \cos^2 \frac{\pi y}{a} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(2 \cos^2 \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi^2}{k^2 a^2} \right) \end{aligned}$$

L'énergie électromagnétique moyenne contenue dans le volume limité par $x = \pm a$, $y = \pm a$ et $z = \ell$ est donc

$$\begin{aligned} U &= \int_{x=-a}^a \int_{y=-a}^a \int_0^\ell \langle u \rangle dx dy dz \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{\pi^2}{k^2 a^2} \right) 4a^2 \ell \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \frac{a^2}{k^2} \ell \left(k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \right) \\ &= \epsilon_0 E_0^2 \frac{a^2 \omega^2}{k^2 c^2} \ell \end{aligned}$$

5. a) On peut évaluer la vitesse de transport de l'énergie par

$$v_e = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{U/\ell} = \frac{\frac{E_0^2 \omega}{\mu_0 k c^2} a^2}{\epsilon_0 E_0^2 \frac{a^2 \omega^2}{k^2 c^2}} = \frac{k}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} = \frac{k c^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}$$

b) La relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$$

soit, en dérivant par rapport à k :

$$2k = 2 \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{dk}$$

donc

$$v_\phi = \frac{c^2}{v_g}$$

On voit que

$$v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = v_e$$

c) La vitesse de phase est

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}}} > c$$

tandis que la vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}} < c$$

6. a) La composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique s'annulent au contact des plans.

b) La densité de courant sur le plan $y = +a$ est

$$\begin{aligned} \vec{j}_s(a) &= \frac{1}{\mu_0} (-\vec{e}_y) \wedge \vec{B}(y=a) \\ &= \frac{E_0 \omega}{k \mu_0 c^2} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_z \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0 \omega}{k} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \vec{j}_s(-a) &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{e}_y) \wedge \vec{B}(y=-a) \\ &= -\frac{E_0 \omega}{k \mu_0 c^2} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_z \\ &= -\frac{\epsilon_0 E_0 \omega}{k} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$