A – Cinématique du point

Exercice A – 1 Exercice : Course de bateaux

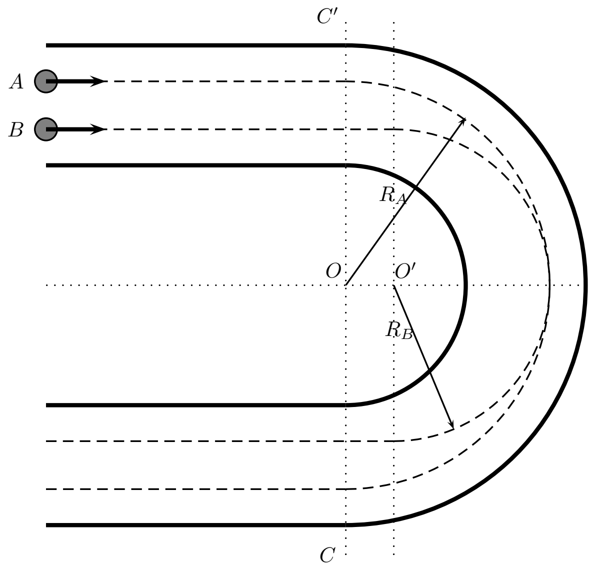
1. Établir l'équation horaire du mouvement d'un point M dont le vecteur accélération constant $\vec{a}$ est colinéaire au vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$.
2. Deux bateaux effectuent une course « départ lancé ». Ils passent au même instant la ligne de départ avec les vitesses respectives $\vec{v}_{10}$ et $\vec{v}_{20}$ et se déplacent parallèlement avec des accélérations $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ constantes.
   Déterminer la longueur du parcours sachant qu'ils atteignent en même temps la ligne d'arrivée.

Exercice A – 2 Exercice : Virage large ou serré ?

Lors d'un grand prix, deux voitures (A et B) arrivent en ligne droite, coupent l'axe CC' au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

- la voiture A suit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $R_A = 90,0$ m
- la voiture B négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $R_B = 75,0$ m.

  Le but de ce problème est de déterminer laquelle des deux voitures sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe CC'.

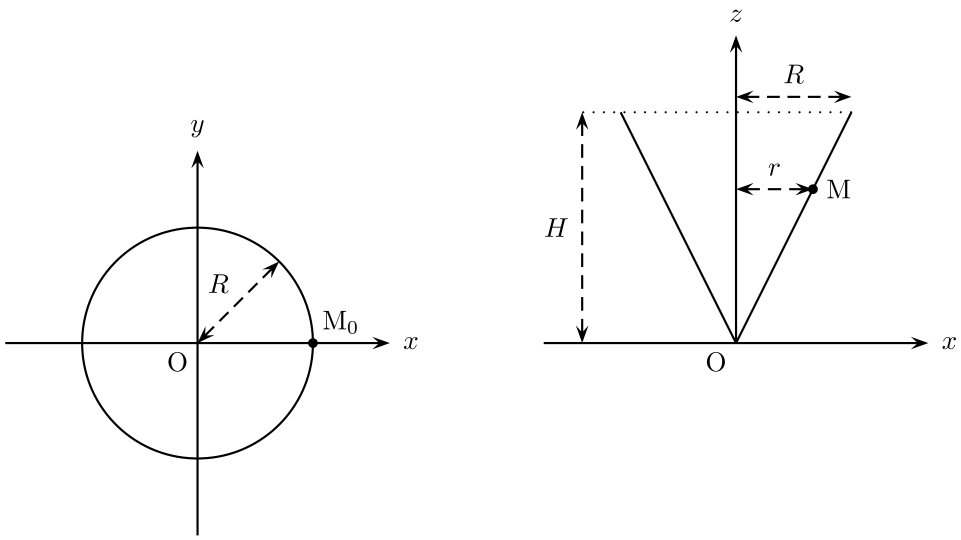


1. Déterminer littéralement puis numériquement les longueurs L_A et L_B des trajectoires des deux voitures entre les entrées et sorties du virage, c'est-à-dire au passage par l'axe (CC') sur la vue en plan.
   Comparer L_A et L_B.
2. On suppose que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage (et avant). Déterminer ces vitesses pour que, dans les virages, les accélérations des deux voitures restent inférieures à $0,8g$ avec $g = 9,81$ m.s^{-2} la constante de pesanteur (au delà de cette limite, elles dérapent et finissent leur route dans les graviers).
   Calculer la vitesse maximale de chaque voiture.
3. Conclure par rapport à la question posée initialement.

Exercice A – 3 Exercice : Bille dans un entonnoir

Une bille assimilée à un point matériel M roule dans un entonnoir modélisé par un cône d'axe Oz, de hauteur H et de base de rayon R (figure suivante).

Initialement, elle est en haut de l'entonnoir en un point M_0. Le mouvement de la bille est supposé uniforme à la vitesse V.



Le point M est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ, z) avec r la distance de M à l'axe Oz, θ l'angle (initialement nul) entre Ox et le projeté orthogonal de M sur le plan xOy et z la cote du point M sur l'axe Oz.

1. Faire un schéma faisant apparaître M, les coordonnées de M et le repère cylindro-polaire.
2. Rappeler l'expression générale du vecteur position dans le repère cylindro-polaire.
3. En déduire l'expression générale du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en repère cylindrique.
4. On suppose que la composante verticale de la vitesse v_z est constante. On la note $v_z(t) = -V_0$ avec V_0 constante positive. En déduire l'équation horaire $z(t)$.
5. Exprimer l'appartenance de M au cône par une relation entre $r(t)$, $z(t)$, R et H. En déduire l'équation horaire $r(t)$.
6. Établir l'expression de $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de V^2, V_0^2, R, H et t.
7. En déduire l'équation horaire $\theta(t)$ (vous pourrez poser $A = \sqrt{V^2 - V_0^2\left(\left(\dfrac{R}{H}\right)^2 + 1\right)}$).
8. Déterminer l'équation de $r(\theta)$ de la trajectoire.
9. Quelle est la durée totale τ de cette chute, ainsi que la distance d qu'aura parcourue M à son terme ? Application numérique : $R = 20,0$ cm, $H = 8,0$ cm, $V = 1,2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $V_0 = 2,5\ \mathrm{mm \cdot s^{-1}}$.

B – Dynamique du point

Exercice B – 1 Flocon de neige, goutte d'eau et bulle

1. Chute d'un flocon

   On s'intéresse à la chute dans l'air d'un flocon de neige, supposé sphérique, de rayon $R = 0,5$ mm et de masse volumique ρ. La viscosité de l'air est η, sa masse volumique ρ_a. On suppose ces grandeurs constantes. Du fait de la viscosité de l'air, le flocon est soumis à une force de frottement $\vec{f_S}$ proportionnelle à sa vitesse $\vec{v}$: $\vec{f_S} = -6\pi\eta R\vec{v}$ (formule de Stokes).
   On peut considérer, qu'une fois formé dans le nuage, le flocon commence son mouvement de chute sans vitesse initiale.

   (a) Dresser le bilan des forces qui s'exercent sur le flocon.
   Exprimer la résultante des forces en fonction de η, ρ, ρ_a, R, g et v.

   (b) Montrer que la vitesse du flocon obéit à l'équation différentielle suivante :
   $$\frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta.$$
   Expliciter les constantes α et β.

(c) En déduire la vitesse limite, v_∞, acquise par ce flocon lors de sa chute.
AN : $\rho = 100$ g/L, $\rho_a = 1,3$ g/L, $\eta = 2,0 \times 10^{-5}$ Pℓ et $g = 9,8$ m.s^{-2}. Calculer cette vitesse limite.

(d) Montrer que la puissance de la force de Stokes est : $P = -6\pi\eta R v^2$.

2. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

Extrait de X MP 2008

(a) Une goutte d'eau sphérique de rayon a, indéformable et de masse volumique uniforme ρ tombe dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ suivant un axe vertical Oz dirigé vers le bas (figure 1).

L'atmosphère exerce sur la goutte la force $\vec{F}$, dite de traînée, opposée à la vitesse $\vec{v}$ et qui s'exprime par la relation

$$\vec{F} = -6\pi\eta \frac{a\vec{v}}{1 + \dfrac{\ell}{a}}$$

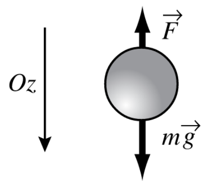


Figure 1 - Forces sur une goutte en chute verticale.

où η et ℓ sont des constantes positives.
Exprimer, à partir de l'équation du mouvement de la goutte, la vitesse limite de chute de cette dernière, que l'on notera $\vec{V}_{lim}$.

(b) On donne $g = 9,8$ m.s^{-2}, $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg.m^{-3}, $\ell = 0,07$ μm et $\eta = 1,7 \times 10^{-5}$ Pa.s.
Calculer V_{lim} pour $a = a_1 = 0,01$ mm puis pour $a = a_2 = 0,1$ mm.

(c) L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km. En utilisant les deux résultats numériques de la question (b), évaluer le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2.

(d) Quel serait le temps de transit dans l'atmosphère de bulles (et non plus de gouttes) de rayon $a_2 = 0,1$ mm et d'épaisseur $e = 0,1 \cdot a_2$?

3. Chute d'une goutte

Un autre modèle pose que la goutte à laquelle on s'intéresse traverse un nuage de gouttes immobiles, qui s'agrègent à la goutte en chute et qui accroissent sa masse d'autant (accrétion).
On ignore alors la force de traînée, mais on admet que le taux d'accroissement de la masse de la goutte est proportionnel à sa vitesse de chute, soit :

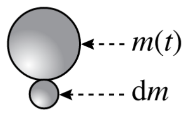


Figure 2 - Accrétion d'une goutte.

$$\frac{1}{m(t)} \frac{dm}{dt} = \lambda v(t)$$

où λ est une constante positive ; on appliquera ici le principe fondamental de la dynamique pour un système de masse variable :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[m(t)\vec{v}(t)]$$

(a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. La résoudre et exprimer $v(t)$ pour une goutte tombant initialement du haut de l'atmosphère, où sa vitesse est nulle.

(b) Quel est le temps caractéristique, noté τ_v, d'évolution de la vitesse ? Quelle est la vitesse limite de chute ?

(c) Avec $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ m^{-1}, calculer τ_v et la vitesse limite de chute.

(d) Quelle remarque critique sur ce modèle ce résultat numérique vous suggère-t-il ? Pour quel rayon de goutte y a-t-il égalité de cette vitesse limite avec celle que donne l'expression obtenue à la question 2 ?

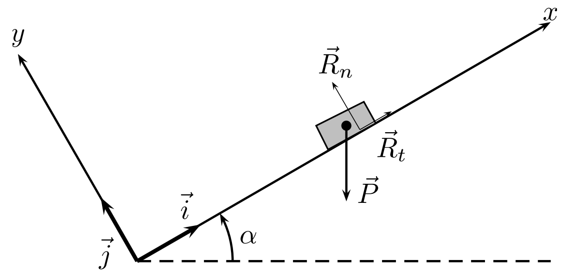
En supposant que le flocon acquiert instantanément sa vitesse limite, exprimer l'énergie E_f perdue par frottement en fonction des données et de la durée de la chute τ. Calculer E_f si $\tau = 1000$ s.

Exercice B – 2 Mesure d'un coefficient de frottement

Extrait du sujet des Petites Mines 2004

On se propose de mesurer le coefficient de frottement du verre sur le verre, noté μ. Pour cela, on dispose d'une grande vitre plane et d'un petit morceau de verre parallélépipédique de masse m. On pose le petit morceau de verre sur la vitre initialement horizontale et on incline doucement la vitre.

On notera α l'angle que fait la vitre avec l'horizontale (cf figure).



1. En supposant que le petit morceau de verre soit immobile, exprimer les composantes normale et tangentielle de la réaction en fonction de la masse m du petit morceau de verre, de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.
2. En déduire une condition sur l'angle α et sur le coefficient de frottement μ pour que le petit morceau de verre ne glisse pas.
3. Expérimentalement, on remarque que pour $\alpha \geq 35^o$ le petit morceau de verre se met à glisser. En déduire la valeur de μ.
4. Pour $\alpha = 45^o$, établir l'équation du mouvement (à $t = 0$, $\overrightarrow{OM}_0 = x_0\vec{i}$, $\vec{v}_0 = \vec{0}$).

Exercice B – 3 Le pendule simple

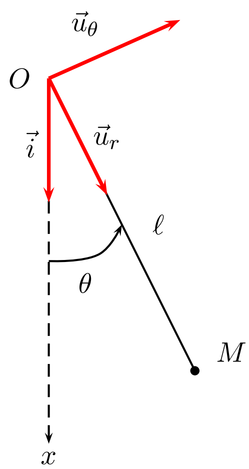
Extrait des Petites Mines 1996.

A. Le pendule simple non amorti.

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse nulle.
L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{i}$ (avec $g = 9,81$ m.s^{-2}), $\vec{i}$ étant un vecteur unitaire de l'axe (Ox).

On note, l'angle orienté : $\theta = ((Ox), \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \vec{u}_r)$ où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. On néglige les frottements.

On lâche la masse d'un angle θ_0 **sans vitesse initiale**. On se place dans le cas des petites oscillations.



Étude dans le cas de petites oscillations

On admet que le mouvement est plan.

1. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.
2. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de ℓ et g.
3. En déduire $\theta(t)$.

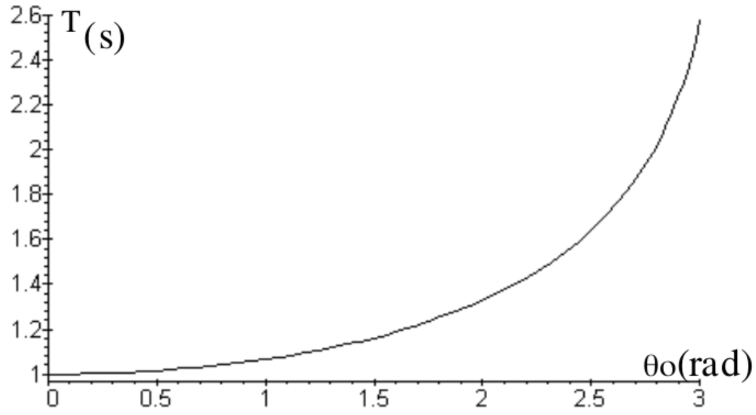
Étude aux grands angles : $\sin(\theta) \neq \theta$.

4. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis en fonction de θ.

5. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.
   En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, θ, θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.
6. Donner l'expression de la période $T(\theta_0)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

   On ne demande pas de calculer cette intégrale.

7. Une intégration numérique donne le courbe ci-dessous, commenter la courbe obtenue.



B. L'oscillateur amorti.

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :

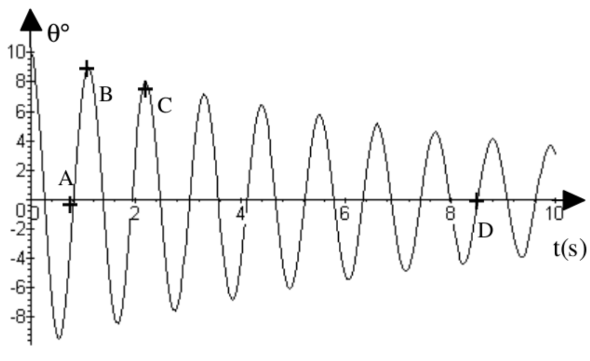
$$\vec{f} = -\alpha.\vec{v},$$

$\vec{v}$ désigne la vitesse du point M et α, une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.
2. En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0.$$

   Donner l'expression de τ et son interprétation physique.
3. À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?
4. Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.
5. On note δ le décrément logarithmique. Exprimer δ en fonction de T et τ.
6. La figure ci-dessous représente les variations de θ avec le temps.



   On précise les coordonnées de 4 points particuliers :

Points	A	B	C	D
t en s	0,53	1,1	2,2	8,25
θ en ^{o}	0	8,95	8,02	0

La masse est $m = 470\ g$.
Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales :

(a) le décrément logarithmique δ ;

(b) la pseudo-période, T ;

(c) le temps τ ;

(d) la constante, α.

Exercice B – 4 Modélisation d'une suspension de véhicule

Extrait de CCINP TSI 2013

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :
- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat...
Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Données : champ de pesanteur : $g = 10$ m.s^{-2}.

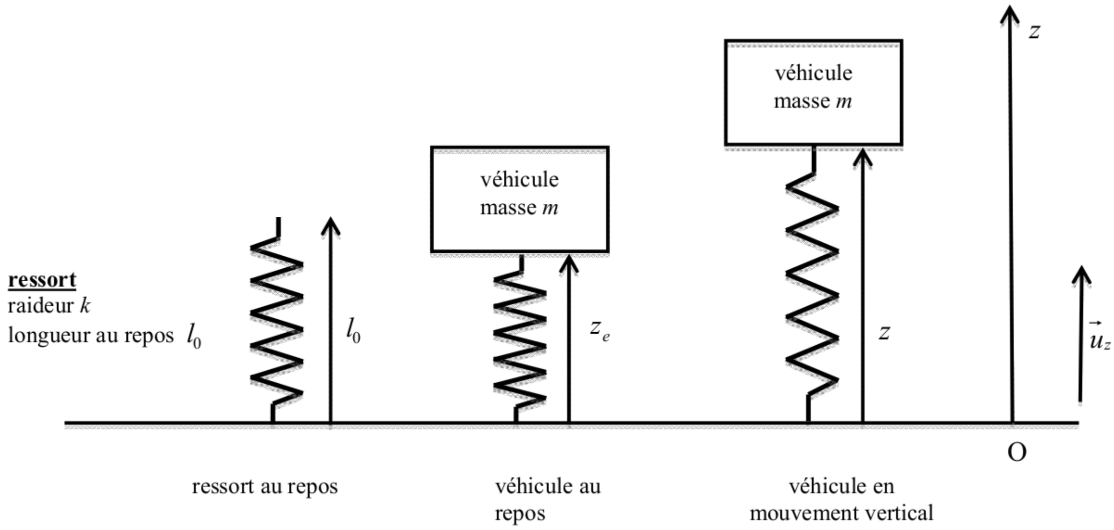
Hypothèses : tout au long du problème, on considérera que :
- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Première partie : suspension sans amortissement.

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1,0 \cdot 10^3$ kg.
La suspension du véhicule est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^5$ N.m^{-1} et de longueur au repos ℓ_0.

Dans cette première partie, on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule.
La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ (figure 1).

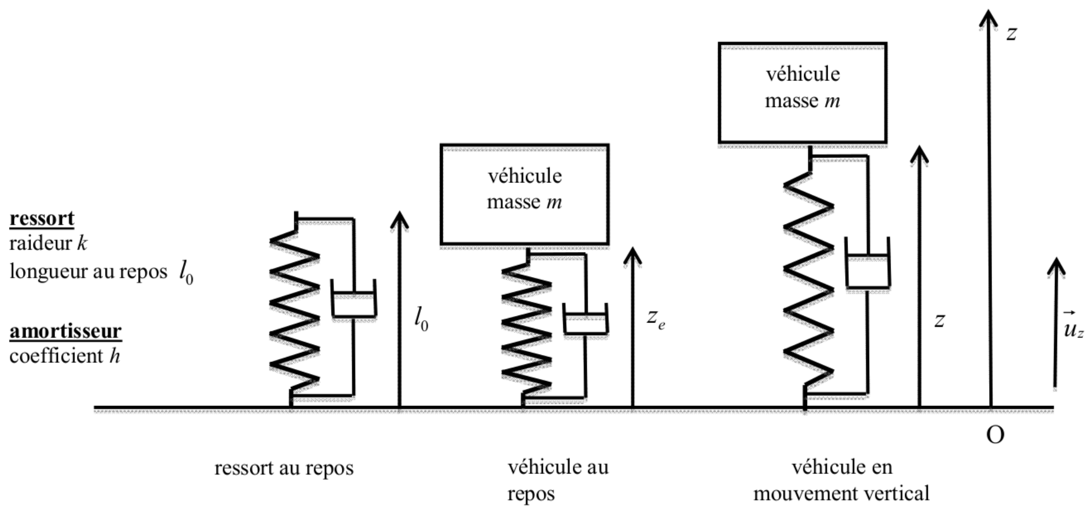
À l'équilibre, en absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnées z_e.



1. Faire un bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.
2. Déterminer l'expression de la cote z_e du véhicule à l'équilibre en fonction de m, g, k et ℓ_0.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
4. Donner la solution générale de l'équation différentielle précédente. Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 en fonction de k et m. Faire les applications numériques.
5. On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans un position repérée par la cote z_0 avec $z_0 < z_e$.
   À l'instant $t = 0$, choisi comme origine des temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution complète $z(t)$ en fonction de t, z_e, z_0 et ω_0.
6. Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0.
   Donner les expressions littérales des cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy}.

Deuxième partie : suspension avec amortissement

On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux données par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide.



7. Quelle est l'unité de h dans le système international ?
8. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z(t)$.
9. Écrire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.

10. Véhicule en charge et vieillissement de la suspension.
    (a) Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-elle lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.
    (b) Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

    Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position verticale du point bas de la suspension la roue) est repérée par la variable $z_s(t)$.

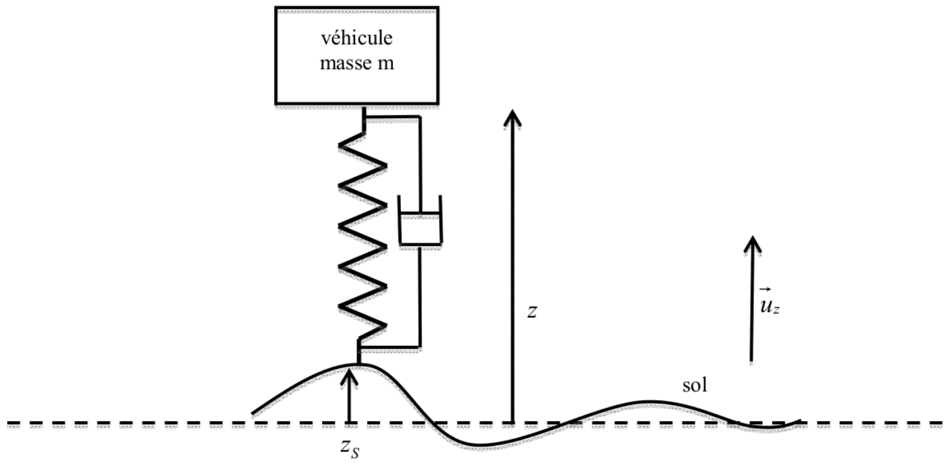


Figure 3 : véhicule sur un sol non plat de profil quelconque

11. Nous nous placerons pour cette question dans la cas particulier où le véhicule se déplace sur une route telle que :
    — pour $t < t_1$; $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$;
    — pour $t > t_1$; $z_s(t) = 0$.

    Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t_1 la véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale de cote nulle.

    On considère que pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante, c'est-à-dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

    Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime pseudopériodique.

Troisième partie : régime forcé

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1. Il se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal.
On a donc $z_s(t) = z_{s0}\cos(\omega t)$.

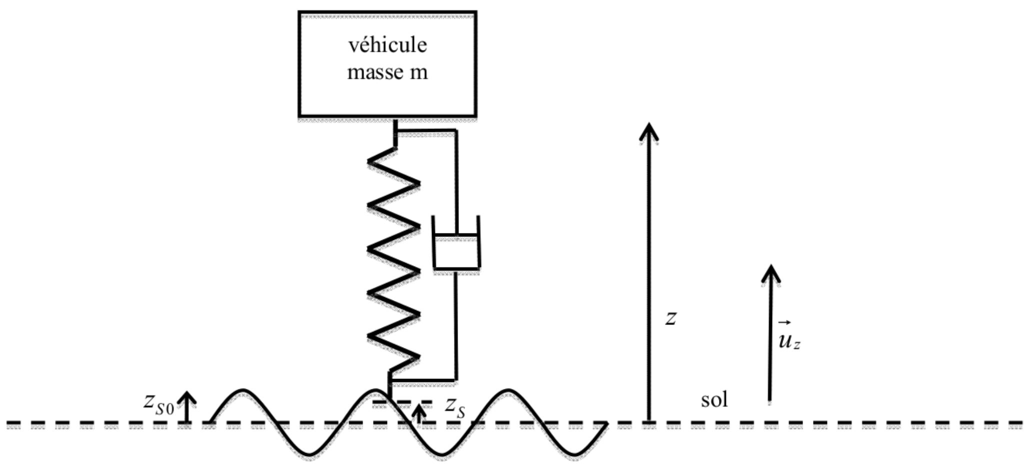


Figure 4 : régime forcé

La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par le force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide. On a donc $\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

12. Déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions $z(t)$ et $z_s(t)$ et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres h, m, k et z_e.

    Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e, on posera $z' = z - z_e$.
13. Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :
    $$m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = Y(t).$$
    Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s, $\dot{z}_s$, k et h.

    Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes.
14. Pour simplifier les notations, on posera :
    $$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } 2\lambda = \frac{h}{m}.$$
    Déterminer l'expression de la réponse complexe $\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}$ de la suspension en fonction de ω, ω_0 et λ.

    Montrer que le module de la réponse complexe est donné par la relation :
    $$H = \left|\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.$$
15. Étude de la réponse complexe.
    (a) Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
    (b) Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
    (c) On considère pour simplifier :
    — que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimale ;
    — que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.
    Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ. À quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

    Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.
16. Donner l'allure de la courbe représentant $H = \left|\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right|$ en fonction de ω. On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

C – Énergie

Exercice C – 1 Voiture réduite à un point matériel

Extrait de G2E 2010

On considère un véhicule, assimilé à un point matériel de masse m, en mouvement rectiligne horizontal. Sa position est repérée par son abscisse x et on ne considérera que les composantes des forces colinéaires au vecteur directeur $\vec{u}_x$ de l'axe Ox. Dans tout le problème, on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

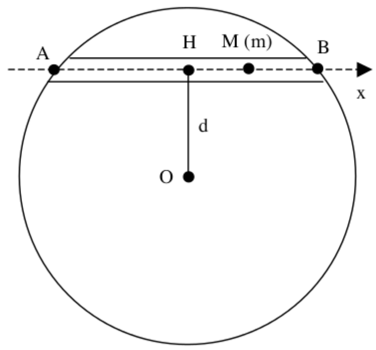
A. Marche avant à puissance constante
L'automobile n'est soumise qu'à l'action de son moteur qui développe une puissance constante P. Elle part du repos en $x = 0$. Les frottements sont négligés.

1. Déterminer, en fonction du temps, les expressions de la vitesse $v(t)$, de l'accélération $\gamma(t)$ et de l'abscisse $x(t)$.
2. Déterminer l'expression de x en fonction de la vitesse v.
3. Au bout de quelle distance le véhicule aura-t-il atteint la vitesse de 90 km/h ?
   On donne : $m = 1200$ kg et $P = 75$ kW.

B. Prise en compte de forces de frottement
La voiture est maintenant soumise, en plus de l'action du moteur, à une force de résistance de l'air, de norme kmv^2, où k est une constante positive.

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, pendant une durée infinitésimale dt, établir l'équation différentielle :
$$dx = \frac{mv^2 dv}{P - kmv^3}.$$
2. En intégrant cette équation différentielle, exprimer x en fonction de v, sachant que $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.
3. Montrer qu'il existe une vitesse limite V_∞.
4. Donner x en fonction de v et de V_∞.
5. On donne $V_\infty = 180$ km/h. Calculer la valeur de k.
6. Au bout de quelle distance X, le véhicule aura-t-il atteint la vitesse de 90 km/h ?

Exercice C – 2 Tunnel terrestre



On admet que pour tout point M de masse m, situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r du centre O de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :
$$\vec{f} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$$
avec $r = OM$ et $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

Données numériques : $R = 6,4.10^6$ m et $g_0 = 10$ m.s^{-2}.

1. Montrer que cette force dérive de l'énergie potentielle
$$E_p(r) = \frac{mg_0 r^2}{2R}$$
   l'on prend $E_p(r = 0) = 0$ au centre de la Terre.
2. Quelle est l'expression de $E_p(A)$?
3. On considère un tunnel rectiligne reliant deux villes A et B, d'axe (Hx) ne passant pas par le centre de la Terre O. On note d la distance OH du tunnel au centre de la Terre.

   Un véhicule, assimilé à un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de la ville A de la surface terrestre, sans vitesse initiale.

   Le vecteur position peut s'exprimer de deux façons :
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = x\vec{e}_x + d\vec{e}_y$$
   Quelle est l'expression de $E_p(x)$?
4. Quelle est sa vitesse maximale v_m au cours de son mouvement ? Calculer v_m sachant que $d = 5.10^6$ m.
5. Exprimer $\overline{HM} = x$ en fonction du temps t par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.
6. Représenter et commenter le graphe de $E_p(x)$, E_p étant l'énergie potentielle de gravitation du point matériel M.

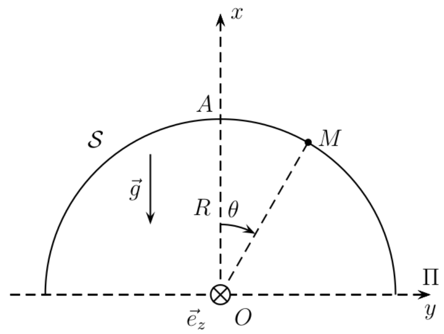
   Décrire le mouvement du point M à partir de sa position initiale (en A).
7. On se propose de relier deux villes A et B distantes de 400 km ($AB = 400$ km).

   Calculer la profondeur maximale p du tunnel à construire.

   Calculer la vitesse maximale du véhicule en kilomètres par heure.

D – Loi du moment cinétique

Exercice D – 1 Palet sur demi-sphère



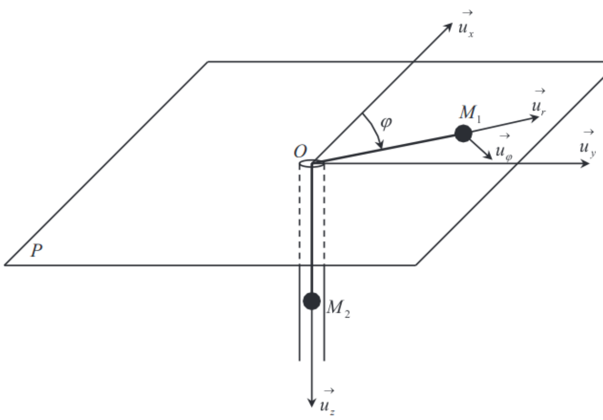
Un petit palet de chocolat, assimilable à un point matériel M de masse m doit décorer le sommet d'un dôme glacé. Il est posé sans vitesse initiale au sommet A de son dôme assimilable à une demi-sphère $\mathscr{S}$ de rayon $R = 15$ cm et de centre O posée sur un plan Π.
On considère que le glissement s'effectue sans frottement.
On suppose le référentiel terrestre galiléen et $g = 10$ m.s^{-2}.

Suite à un déséquilibre infinitésimal, M se met en mouvement sous l'effet de son poids, tout en restant dans le plan vertical Oxy.
On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, M reste en contact avec $\mathscr{S}$, sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

1. Faire un bilan des forces et les représenter sur un schéma.
2. Établir l'expression du moment cinétique en O du point matériel M à l'instant initial.
3. Exprimer le moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des coordonnées polaires.
4. Exprimer les moments des forces en O.
5. Déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.
6. En utilisant un théorème énergétique, déterminer la vitesse de M en fonction de θ, g et R.
7. En déduire une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ.
8. Déterminer la réaction R_N du dôme sur le palet en fonction de θ.
9. En déduire l'angle θ_m à partir duquel le palet quitte le dôme.

Exercice D – 2 Point matériel sur un plan horizontal

D'après concours d'entrée ingénieur 2013



Dans le référentiel galiléen lié à la table, auquel on associe le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m, reliées par un fil (M_1OM_2) de longueur L, inextensible et de masse négligeable.

Le point matériel M_1 glisse sans frottement sur le plan **horizontal** $\mathscr{P}$ tandis que le point matériel M_2 coulisse sans frottement dans un tube vertical. La résultante de l'action du tube sur M_2 est égale au vecteur nul.

On note $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ le repère cylindrique et $\vec{g} = g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

La position du point M_1 est définie par $\overrightarrow{OM}_1 = r\vec{u}_r$ et la position du point M_2 est définie par $\overrightarrow{OM}_2 = z\vec{u}_z$.

Les condition initiales sont $r = r_0$ et $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

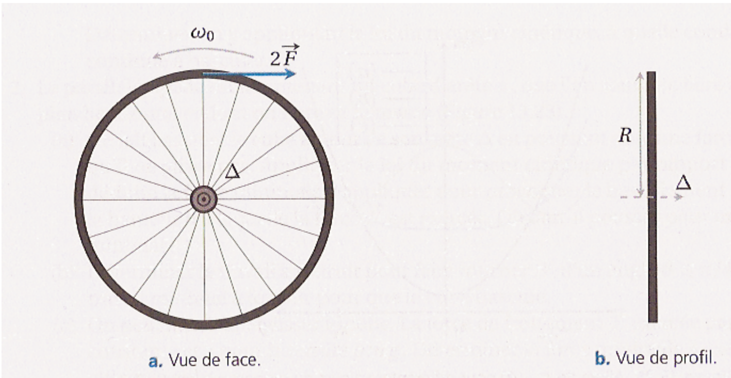
1. Établir un bilan des forces s'exerçant sur M_1 puis sur M_2.
2. Projeter la deuxième loi de Newton appliquée à chaque point matériel M_1 puis M_2 dans la base cylindrique.
3. Déterminer le moment cinétique par rapport à O de chaque point matériel.

4. En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer $\dot{\varphi}$ en fonction de r, ω_0 et r_0.
5. Le fil étant de masse négligeable, on dit qu'il transfert intégralement les tensions. Cela signifie que la norme de l'action du fil sur M_1 est égale à la norme de l'action du fil sur M_2. À partir des résultats précédents, montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit r s'écrit sous la forme :
$$2\ddot{r} - \frac{K}{r^3} = -g.$$
On exprimera K en fonction de ω_0 et r_0.
6. On considère maintenant le cas où M_1 décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon r_0. Déterminer alors ω_0 en fonction de r_0 et g pour que cela soit possible.

E – Solide

Exercice E – 1 Roue de vélo

On considère une roue de bicyclette à rayons de rayon R, de centre O et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par des freins à étrier. Chacun des deux freins exerce sur la jante une force d'intensité F que l'on considérera constante tant que la roue tourne.



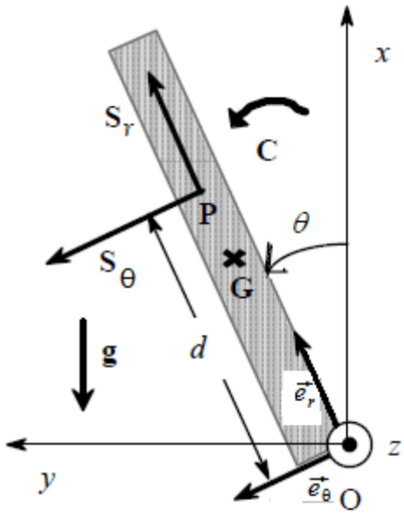
Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu fixe, noté $\Delta = Oz$. On néglige les frottements sur l'axe.

1. Calculer le moment d'inertie de la roue $J_\Delta = mR^2$ par rapport à l'axe Δ (cf données à la fin du problème).
2. Déterminer le moment des forces exercées par les freins par rapport à l'axe Δ.
3. Déterminer l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ autour de l'axe Δ.
4. En déduire les expressions de $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ si, à $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \omega_0$.
5. Calculer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour pour les paramètres suivants : $R = 33$ cm, $m = 1,6$ kg et $\omega_0 = 15$ rad.s^{-1}.
6. Avant le freinage, quelle était la vitesse d'un des points de la circonférence de la roue ?

Exercice E – 2 Chute d'un cheminée

D'après Mines-Ponts Phys 1 option MP 2005.

Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M, de longueur D et de rayon **très petit** devant D. Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit ; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (O, x, y). On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale.



On étudie le mouvement de la cheminée dans le repère R_G en projection sur la base mobile de coordonnées polaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$. $\vec{e}_r$ est porté par l'axe de la cheminée, $\vec{e}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le sens de rotation de l'angle θ et G est le centre de masse de la cheminée.

Les moments d'inertie en G autour de l'axe Gz et en O autour de l'axe Oz sont respectivement : $J_G = \frac{1}{12}MD^2$ et $J_O = \frac{1}{3}MD^2$.

La liaison pivot en O est parfaite.

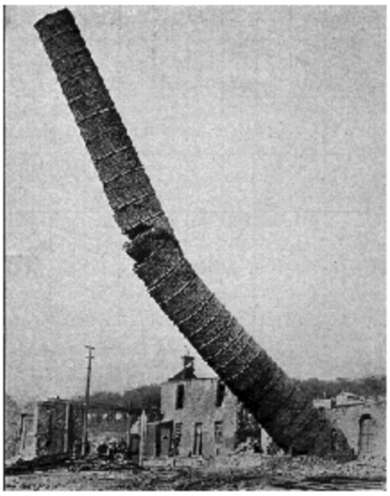
1. Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en O, l'équation d'évolution de l'angle θ.
2. Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.
3. Exprimer, en fonction de l'angle θ, les composantes R_r et R_θ de la réaction du sol en O en projection sur $\vec{e}_r$ et sur $\vec{e}_\theta$.

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en P. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en P n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force $\vec{S}$ de composantes S_r et S_θ et un couple $\mathscr{C}$ porté par l'axe horizontal Oz.

4. (a) En appliquant le principe de la résultante cinétique à la longueur d de cheminée, exprimer S_θ en fonction de M, g, θ, d et D. La grandeur S_θ est appelée effort de cisaillement.
   (b) Tracer qualitativement le graphe donnant S_θ en fonction du rapport $\frac{d}{D}$, (θ est donné).
5. Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement S_θ est le plus important : quel est ce point ?
6. Montrer que le théorème du moment cinétique en O, appliqué à la longueur d de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté C) du couple $\mathscr{C}$:

$$C = -\frac{1}{4}Mgd\left(\frac{d}{D} - 1\right)^2 \sin(\theta)$$

7. Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.



F – Forces centrales conservatives

Exercice F – 1 Étude de la comète 67P Churyomov – Gerasimenko

Extrait du sujet Mines-Pont 2017 option PSI

La comète étudiée s'appelle Churyomov – Gerasimenko, du nom des scientifiques ukrainiens M. Churyumov, l'utilisateur du télescope, et Mme Gerasimenko, la comparatrice d'images, qui l'ont codécouverte en 1969. Cette comète mesure entre 3 et 5 km de diamètre et tourne sur elle-même en une douzaine d'heures. Voilà à peu près tout ce que l'on savait sur la comète objet de Rosetta et Philae. Les estimations sur sa masse, varient, quant à elles, d'un facteur 10 et sa forme exacte restera un mystère jusqu'en juillet 2014 date de la première photo envoyée par Rosetta. Le noyau de la comète n'a pu être observé que depuis la Terre (le Very Large Telescope au Chili en lumière visible ou proche infrarouge) ou les satellites tournant autour de la Terre (Hubble en lumière visible, Spitzer en moyen infrarouge). De ces observations ont été tirées des courbes de lumière qui, elles-mêmes, ont permis de déterminer quelques unes de ses caractéristiques.

1. En appliquant le principe fondamental de la mécanique à une comète de masse m en orbite circulaire de rayon R autour du Soleil, retrouver la 3^e loi de Kepler.

Dans le cas d'une orbite elliptique, on peut démontrer que cette relation se généralise en remplaçant le rayon R par le demi grand axe a de l'ellipse (voir figure 1). En déduire la relation entre le demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la comète, la période T de la comète, la masse du Soleil $M_\odot$ et la constante de gravitation $\mathscr{G}$. Déterminer la valeur numérique de la période T_c de la comète Churry. On donne $2\pi a_c = 33{\cdot}10^{11}$ SI et on prendra 1 an $\simeq \dfrac{1}{3}\cdot 10^8$ secondes.

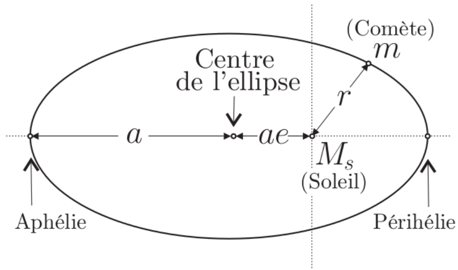


FIGURE 1 – Orbite elliptique d'excentricité e et de demi-grand axe a.

2. On ne suppose plus la trajectoire circulaire, et on note $\vec{r}$ le vecteur position de la comète dans le référentiel héliocentrique et $r = \|\vec{r}\|$. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_S$ de la comète par rapport au Soleil. Montrer que la trajectoire de la comète est contenue dans un plan que l'on précisera.
   Déterminer l'expression de $\mathscr{C} = \dfrac{\|\vec{\sigma}_S\|}{m}$ en fonction des coordonnées polaires (r,θ) de la comète dans ce plan.
3. Établir la relation $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r)$ où E_m est l'énergie mécanique supposée négative de la comète et $E_{eff}(r)$ son énergie potentielle effective que l'on exprimera en fonction de $\mathscr{C}$, $\mathscr{G}$, m, $M_\odot$ et r. Tracer la représentation graphique de $E_{eff}(r)$, et positionner sur ce graphique E_m, l'aphélie r_{max} et le périhélie r_{min} (voir figure 1).
4. Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire correspondant à $r = r_{min} = r_{max} = r_0$ et $E_m = E_0$. Déterminer l'expression de r_0 en fonction de $\mathscr{C}$, $\mathscr{G}$ et $M_\odot$ puis en déduire celle de E_0 en fonction de $\mathscr{C}$, $\mathscr{G}$, $M_\odot$ et m. On note respectivement $E_c(r)$ et $E_p(r)$ les énergies cinétique et potentielle de la comète à la distance r du Soleil, déterminer la relation entre $E_c(r_0)$ et $E_p(r_0)$.
5. Établir l'équation du second degré en r dont r_{min} et r_{max} sont solutions, qui permet de déduire l'expression de E_m en fonction de $\mathscr{G}$, m, $M_\odot$ et a. On donnera cette expression. Après avoir montré que son discriminant est bien positif, résoudre l'équation et déterminer la relation liant e à E_m, $\mathscr{C}$, a et m.
6. Quelle est la propriété de la vitesse aréolaire de la comète, rapport de la surface balayée par le rayon vecteur de la comète sur le temps mis par la parcourir ? Quel est l'astronome qui a identifié cette propriété qui porte son nom ? Sachant que l'aire d'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est $S = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$, déterminer la relation entre la période de la comète et le demi-grand axe de l'ellipse. Commenter le résultat obtenu.

Données numériques

- Constante de la gravitation : $\mathscr{G} = 6,7 \times 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}.
- Vitesse de la lumière : $c = 3 \times 10^8$ m·s^{-1}.
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg.
- Unité astronomique : 1 ua $= 1,5 \times 10^{11}$ m.

Caractéristiques de la comète Churry

- r_{max} : aphélie, distance au plus loin du Soleil : 5,70 ua
- r_{min} : périhélie, distance au plus près du Soleil : 1,30 ua
- Taille caractéristique : 2000 m (albédo de 4%)
- Période de rotation autour de son axe principal : 12,6 h

Exercice F – 2 Satellites solaires

Le Soleil est décrit comme un astre à symétrie sphérique dont le centre O peut être considéré comme l'origine d'un référentiel galiléen (référentiel de Copernic). On étudie dans ce référentiel le mouvement d'un point matériel M de masse m. Celui-ci n'est soumis qu'à la force de gravitation due au Soleil : on néglige l'attraction des planètes. La masse du Soleil est notée M_S et la constante de gravitation $\mathscr{G}$: ces grandeurs peuvent apparaître dans les calculs mais leurs valeurs numériques n'ont pas besoin d'être connues.

1. La position du point matériel M est repérée dans le référentiel d'étude par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ Son vecteur vitesse à l'instant t est noté $\vec{v}$.

   (a) Donner l'expression de la force de gravitation à laquelle M est soumis.
   (b) Montrer que le moment cinétique en O de M est constant lors du mouvement.
   (c) Montrer que sa trajectoire est plane.
   (d) Dans le plan de la trajectoire, on repère le point M par ses coordonnées polaires r et θ (θ est l'angle polaire compté à partir d'un axe origine quelconque). Montrer qu'on peut écrire $r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est une constante. Si, à un instant donné, M est en un point P tel que sa vitesse $\vec{v}_P$ soit perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}$ ($OP = r_P$), déterminer la constante $\mathscr{C}$ en fonction de r_P et v_P.
   (e) Montrer que l'énergie mécanique de M reste constante au cours du mouvement.

2. Une trajectoire possible de M est un cercle de centre O et de rayon R.

   (a) Montrer que si le mouvement est circulaire, il est circulaire uniforme.
   (b) Déterminer la vitesse de M sur sa trajectoire et la durée T de révolution appelée période.
   (c) Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de M en fonction de $\mathscr{G}$, M_S, m et R.
   (d) La trajectoire de la Terre autour du Soleil est très voisine d'un cercle de rayon R_0 et de période T_0. Donner, avec justification, une valeur convenable (à moins de 1% près) de la période T_0 en seconde. La vitesse orbitale de la Terre est $v_0 = 30\ 000\ m.s^{-1}$, calculer R_0. Exprimer le produit $\mathscr{G}M_S$ en fonction de R_0 et v_0.

3. On peut montrer que la trajectoire la plus générale de M est une conique. Parmi ces trajectoires, on s'intéresse aux trajectoires elliptiques d'équation polaire (le pôle étant au foyer O et l'axe polaire origine étant le grand axe AP, orienté de A vers P) :
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$
où p et e sont des constantes ($0 \leq e \leq 1$). Le point le plus éloigné de O est l'aphélie A et le point le plus rapproché de O est le périhélie P.

   (a) Faire le schéma de l'ellipse et placer les points O, A, P et M. Faire figurer l'angle θ.
   (b) Calculer la longueur a du demi-grand axe de cette ellipse en fonction de p et e.
   (c) Quelle est la trajectoire pour $e = 0$?
   (d) On admettra pour la suite du problème que les expressions obtenues au 2(b) et 2(c) pour la période et l'énergie mécanique des satellites restent valables à condition de remplacer le rayon R par la longueur

du demi-grand axe a. En tenant compte de 1(e), montrer que la vitesse v en un point quelconque de la trajectoire est donnée par :

$$v^2 = \mathscr{G} M_S \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

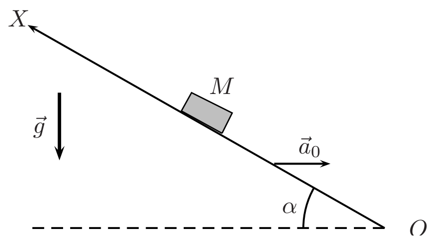
4. L'orbite de Mars est décrite comme circulaire, coplanaire à l'orbite terrestre, de rayon $R_1 = n \cdot R_0$ ($n = 1,524$). On veut transférer un engin spatial de l'orbite terrestre à l'orbite matienne ; on néglige pendant ce transfert l'attraction des planètes pour ne retenir que celle du Soleil.
L'une des trajectoires possibles est une ellipse, dont le Soleil est un foyer, tangente à l'orbite terrestre en son périhélie P et à l'orbite martienne en son aphélie A, et coplanaire à l'orbite terrestre.

   (a) Faire un schéma expliquant ce transfert.
   (b) Calculer la durée T_1 de l'année martienne et la vitesse orbitale v_1 de Mars.
   (c) Quelle doit être la vitesse v_P de l'engin spatial au point P sur l'ellipse de transfert ? L'exprimer en fonction de v_0 et n puis la calculer numériquement.
   (d) Quelle doit être sa vitesse v_A en A ? Calculer la différence $v_P - v_A$.
   (e) Déterminer la durée du transfert en années terrestres.

G – Référentiels non galiléen

Exercice G – 1 Plan incliné en translation

Un point matériel M, de masse m, peut glisser sans frottement sur un support plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce plan est en mouvement de translation uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a}_0$ horizontale par rapport À un référentiel galiléen. On étudie le mouvement du point M suivant la ligne de plus grande pente (OX).

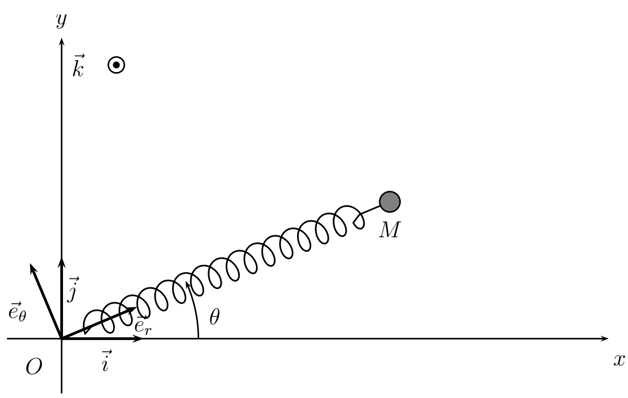


1. Établir l'expression de l'accélération $\ddot{X}$ du point M relativement au plan incliné.
2. À la date t=0, le point est abandonné sans vitesse initiale par rapport au plan. À quelle condition sur l'angle α le point remonte-t-il la pente ?

Exercice G – 2 Étude d'un ressort dans 2 référentiels

Extrait du concours Petites Mines 2002.

A. Étude d'un ressort dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire.



Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le **plan horizontal** (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant **la verticale** (Oz) : $\vec{g} = -g\vec{k}$.
La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$.

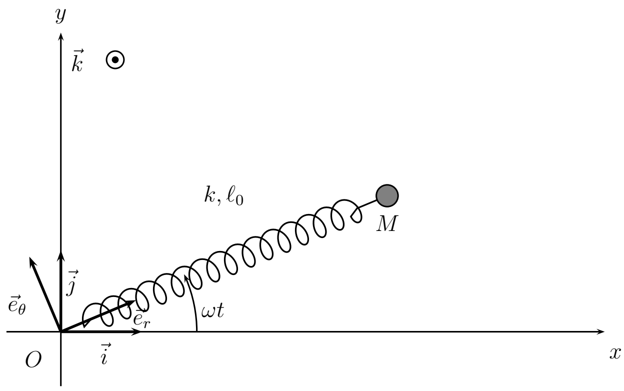
1. Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ par rapport à O.
2. À $t = 0$, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $\ell = 1,2 \cdot \ell_0$: $\overrightarrow{OM}(t=0) = 1,2 \cdot \ell_0 \vec{i}$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{L_O}$. Quelle est la nature de la trajectoire ?
   (b) Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort, $\ell(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de ℓ, longueur du ressort.
3. On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM}(t=0) = \ell_1 \cdot \vec{i}$, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = \ell_1\omega\vec{j}$, orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y).
   (a) Préciser $\overrightarrow{L_O}$ en fonction r et $\dfrac{d\theta}{dt}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L, le module de $\overrightarrow{L_O}$.
   (b) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique.
   Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?
   Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique, E_m.
   Préciser l'expression de E_m :
   — en fonction des conditions initiales,
   — en fonction de r, $\dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{d\theta}{dt}$, m, k et ℓ_0.
   (c) Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire :
   $$E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{\text{eff}}(r).$$
   Préciser l'expression de $E_{\text{eff}}(r)$. Tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$.
   (d) La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?
   (e) La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours de son mouvement ?
   (f) La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?
4. On cherche à déterminer une condition entre ℓ_1 et ω pour avoir un mouvement circulaire.
   (a) Montrer que, dans ce cas, le mouvement est uniforme.
   (b) Déterminer ℓ_1 en fonction de k, ℓ_0 et ω. Est-elle valable pour tout ω ?

B. Étude dans un référentiel $\mathscr{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Le mouvement est étudié dans le référentiel $\mathscr{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse $\overrightarrow{\Omega} = \omega\,\overrightarrow{k}$, et associé au repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{k})$.

On considère une particule M de masse m pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe $(O, \overrightarrow{e_r})$. Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz : $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{k}$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$.



1. Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{k})$.
2. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{pf_{ie}}$ que l'on précisera.
3. En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis ?
4. Déterminer l'énergie potentielle totale. Tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera les 3 cas possibles selon la valeur de ω.
5. Déterminer la longueur ℓ_2 correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel $\mathscr{R}'$.

   À quelle condition sur ω le résultat est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ?

   Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?
6. Comparer ℓ_2 à ℓ_1 du paragraphe précédent. Conclusion.

Exercice G – 3 Le satellite océanographique Jason 2

Extrait du sujet Centrale-Supélec MP 2012

Lancé le 20 juin 2008 de Vandenberg (Californie), le satellite océanographique Jason 2 permet, entre autre, de mesurer la hauteur des océans.

Dans une première partie, le problème étudie la trajectoire de ce satellite au-dessus de l'ionosphère, d'abord en considérant la Terre comme sphérique, puis en prenant en compte sa non-sphéricité.

Données utiles

Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre	$R_T = 6378$ km
Vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique	$\omega_T = 7,29 \times 10^{-5}$ rad.s^{-1}

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données de l'énoncé.

Étude de l'orbite

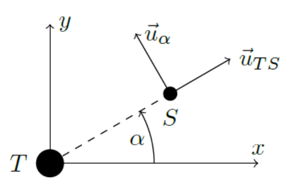
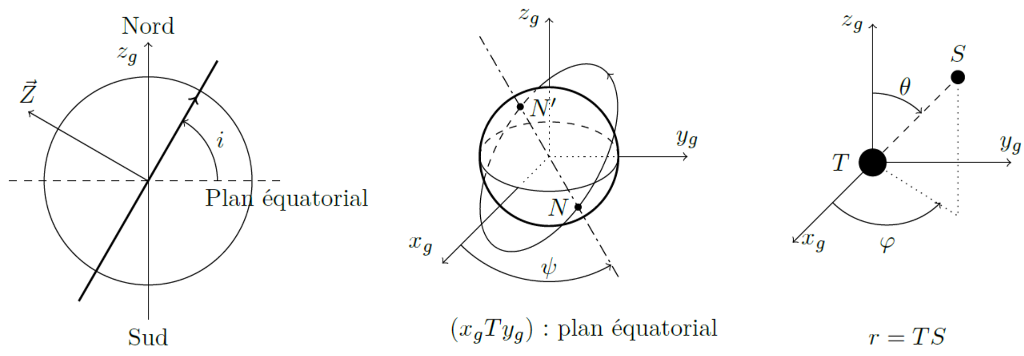


Figure 1

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation $\vec{F}$ qu'exerce la Terre (centre T, masse M_T) sur un satellite (point matériel S, masse m), en fonction de la constante de gravitation G, des masses M_T et m, de la distance $r = TS$

et du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_{TS}} = \dfrac{\overrightarrow{TS}}{TS}$.

2. On se place dans le référentiel géocentrique (T, x_g, y_g, z_g) noté $(\mathcal{R}_g)$, de base fixe $(\vec{e}_{xg}, \vec{e}_{yg}, \vec{e}_{zg})$ (figure 2b).



(a) (b) (c)

Figure 2

   (a) Définir le référentiel géocentrique. Pourquoi ce référentiel n'est-il pas rigoureusement galiléen ? Justifier.

   Dans toute la suite, le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_g)$ est considéré comme galiléen et, sauf mention contraire, seule l'action de la Terre est prise en compte.

   (b) Dans ce référentiel, quelles sont les deux grandeurs mécaniques du satellite qui se conservent (on justifiera la réponse) ? Quelles caractéristiques du mouvement peut-on en déduire ?

3. On se propose d'établir l'expression de la trajectoire du satellite autour de la Terre à partir de l'invariant dynamique de Runge-Lenz. On définit le vecteur de Runge-Lenz par $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\sigma_T} - GM_Tm\overrightarrow{u_{TS}}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse du satellite dans $(\mathcal{R}_g)$ et $\overrightarrow{\sigma_T}$ le moment cinétique du satellite dans $(\mathcal{R}_g)$, calculé en T.

   (a) Calculer $\dfrac{d\overrightarrow{R}}{dr}$ dans $(\mathcal{R}_g)$. Conclure.

   (b) Dans quel plan se trouve $\overrightarrow{R}$? Justifier.

   (c) On note R la norme de $\overrightarrow{R}$ et β l'angle entre $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{TS}$.

   Montrer que $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{u_{TS}} = \dfrac{\sigma_T^2}{mr} - GM_Tm$ où σ_T est la norme du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_T}$ du satellite. En déduire l'expression de la trajectoire du satellite sous la forme

$$r(\beta) = \frac{p}{1 + e\cos\beta}$$

   donner les expressions de p et e en fonction de σ_T, G, M_T, m et R. Suivant les valeurs de e, rappeler les différentes trajectoires possibles.

4. On admet que la trajectoire de Jason 2 est circulaire (en réalité, $e = 9{,}5 \times 10^{-5}$), de centre T, de rayon $r_0 = 7714$ km, soit une altitude $h = 1336$ km (juste au dessus de l'ionosphère). La masse du satellite Jason 2 est $m = 525$ kg.
   Établir en fonction de G, M_T, m et r_0, les expressions de :
   — la norme de la vitesse orbitale du satellite v_0 ;
   — la période de révolution T_0 ;
   — son énergie mécanique E_m.
   Calculer numériquement ces grandeurs pour le satellite Jason 2.

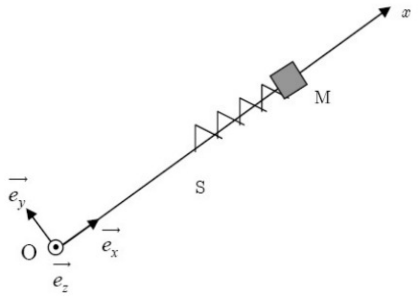
Exercice G – 4 Accélération radiale d'un satellite.

Extrait de CCP 2008 filière MP :

Un satellite, de masse m_s, de centre d'inertie S, est en orbite circulaire autour de la terre de centre O. Sa période est $T_0 = 12$ h. Dans ce satellite un point matériel M de masse $m = 100$ g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx, fixe dans le satellite (cf. figure suivante). En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{1}{2} m\omega_1^2 x^2$$

avec $\omega_1 = 0,03$ rad.s^{-1} et $\overrightarrow{SM} = x\vec{e}_x$.
Rayon de la terre $R = 6400$ km ; $g = 9,8$ m.s^{-2} intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la terre.



On pose $r_o = OS$ et on désigne par $\mathscr{R}_S$ le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

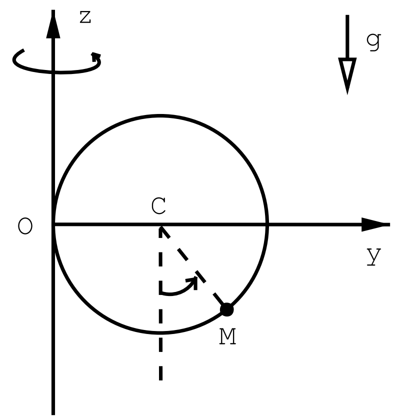
Le référentiel $\mathscr{R}_g$ géocentrique est supposé galiléen.

1. (a) Déterminer la vitesse v_o du satellite en fonction de r_o, g et R.
   (b) En déduire l'expression de T_0 en fonction de r_o, g et R. Calculer numériquement r_o, v_o et la vitesse angulaire ω_o du satellite dans $\mathscr{R}_g$.
2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}_S$.
   (a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
   (b) Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x \ll r_o$, en ne faisant intervenir que ω_o, ω_1, x et ses dérivées temporelles.
   (c) Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.
   (d) Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite ?

Exercice G – 5 Perle sur cerceau tournant

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur une circonférence de centre C et de rayon R, contenue dans un **plan vertical**. Par rapport au référentiel terrestre noté $\mathscr{R}$, supposé galiléen, ce cercle tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe **vertical tangent** à la circonférence.

La position du point M, dans le référentiel $\mathscr{R}'$ lié au cercle est repérée par l'angle θ que fait $\overrightarrow{CM}$ avec la verticale descendante. On associe au référentiel $\mathscr{R}'$ le repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}')$.



1. Quelles sont les forces auxquelles est soumis le point M dans le référentiel lié au cercle ?
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique dans $\mathscr{R}'$.
3. En déduire que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme : $R\ddot{\theta} = f(\theta)$.
4. Donner l'expression des composantes de la réaction du cercle dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}')$
5. Définir le moment cinétique du point M en C dans le référentiel $\mathscr{R}'$ et donner son expression.
6. Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\mathscr{R}'$.

7. En déduire l'équation du mouvement.
8. Exprimer l'énergie cinétique de M dans le référentiel lié à la circonférence.
9. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle. On prendra l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$.
10. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.
11. Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre du point M est :

$$R\omega^2(1 + \sin\theta) = g \tan\theta.$$

12. Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
13. On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \pi/6$. Calculer la valeur de la vitesse de rotation correspondante (on prendra $R = 1\ m$ et $g = 10\ m.s^{-1}$).
14. Cette position d'équilibre est-elle stable ?