A – Cinématique du point

Exercice 1 Course de bateaux

1) Point matériel M $\quad \vec{a} = a_0 \vec{\imath}$ et $\vec{v}_0 = v_0 \vec{\imath}$

Par définition $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}_0\, t \qquad \underline{\vec{v}(t) = (a_0 t + v_0)\, \vec{\imath}}$

Par définition $\quad \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$

On a 1 mouvement rectiligne.

$$\boxed{\vec{OM}(t) = \left(a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t\right) \vec{\imath} + \vec{OM}_0}$$

$\vec{OM}_0$: position initiale

2) <u>bateau 1</u> B_1. $\quad \vec{OB}_1(t) = \left(a_1 \dfrac{t^2}{2} + v_{01} t\right) \vec{\imath} + \vec{OB}_{01}$

<u>bateau 2</u> B_2 $\quad \vec{OB}_2(t) = \left(a_2 \dfrac{t^2}{2} + v_{02} t\right) \vec{\imath} + \vec{OB}_{02}$

On a $\vec{OB}_{01} \cdot \vec{\imath} = \vec{OB}_{02} \cdot \vec{\imath}$

Soit L la longueur du parcours. On cherche à avoir :

$$a_1 \frac{t_f^2}{2} + v_{01} t_f = a_2 \frac{t_f^2}{2} + v_{02} t_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2)\, t_f^2 + (v_{01} - v_{02})\, t_f = 0$$

$$\Leftrightarrow t_f \cdot \left[\frac{1}{2}(a_1 - a_2)\, t_f + (v_{01} - v_{02})\right] = 0$$

$$t_f = \frac{2(v_{02} - v_{01})}{a_1 - a_2}$$

$$L = \frac{2 a_1}{(a_1 - a_2)^2}(v_{02} - v_{01})^2 + \frac{2 v_{01}(v_{02} - v_{01})}{a_1 - a_2}$$

$$\boxed{L = \frac{2(v_{02} - v_{01})(a_1 v_{02} - a_2 v_{01})}{(a_1 - a_2)^2}}$$

Course de bateaux – Commentaires

1) Vecteur accélération constant $\vec{a}$

$\Rightarrow \begin{cases} \|\vec{a}\| = a_0 \text{ est constante} \\ \text{direction et le sens de } \vec{a} \text{ ne changent pas} \end{cases}$

On a donc 1 direction privilégiée = 1 direction du repère cartésien choisi $(O\, \vec{\imath}\, \vec{\jmath}\, \vec{k})$

$\vec{a} = a_0 \vec{\imath}$

Puis $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ colinéaire à $\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{v}_0 = v_0 \vec{\imath}$

⚠ Evitez $\vec{v}_0 = k\, \vec{a}_0$ car $[k] \neq 1$

$([k] = T)$

Il faut partir des définitions,

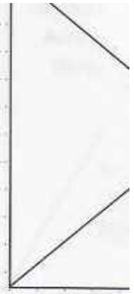
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$ VECTEURS

faire apparaître les constantes d'intégration et les déterminer.

... $x(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$

$y(t) = y_0$

$z(t) = z_0$



Conclusion : Mouvement rectiligne uniformément accéléré

2| Evitez $\overrightarrow{OB_{O_1}} = \overrightarrow{OB_{O_2}}$

Par contre $x_{O_1} = x_{O_2}$!

Définissez t_f

$\rightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2) t_f^2 + (v_{O_1} - v_{O_2}) t_f = 0$

Une solution triviale $t_f = 0$ qui ne nous intéresse pas.

PAS BESOIN DE DISCRIMINANT !!!

t_f n'est pas 1 longueur, il faut la réinjecter

Exercice 2 Virage large ou serré ?

1| $L_A = \pi R_A$ $\quad L_A = 283$ m.

$L_B = \pi R_B + 200'$

$= \pi R_B + 2(R_A - R_B)$ $\quad L_B = 266$ m

$L_B < L_A$

2| Dans le virage la trajectoire est circulaire

⇒ repère polaire

$\overrightarrow{OM} = R\vec{u_r}$ $\quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta} = v\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$ avec $v = cte$.

$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$

On veut $\frac{v^2}{R} \leq 0,8\,g$.

$v_A \leq \sqrt{0,8\,g R_A}$ et $v_B \leq \sqrt{0,8\,g R_B}$

$v_{A\,max} = 26,6 \text{ ms}^{-1} = 95,8 \text{ km h}^{-1}$ $\quad v_{B\,max} = 24,3 \text{ ms}^{-1} = 87,3 \text{ km h}^{-1}$

3| Mouvement uniforme $T_i = \frac{L_i}{v_i}$

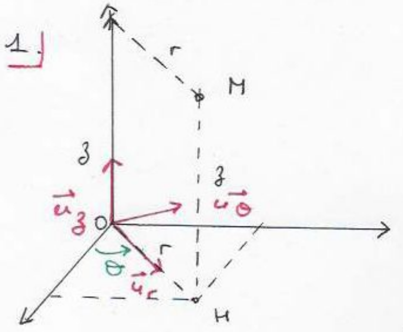
avec T_i = temps de parcours du virage.

$T_A = 10,6$ s $\quad T_B = 10,9$ s

La voiture A sort en premier du virage.

Exercice 3 Bille dans un entonnoir

1)



2) $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z}$

3) $\vec{v}$ vecteur vitesse

Par définition

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z}$$

4) $v_z(t) = -V_0$ or $v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t)$

soit $\frac{dz}{dt} = -V_0$

On intègre par rapport au temps : $z(t) = -V_0 t + C_1$

avec $z(0) = H = C_1$

$$\boxed{z(t) = H - V_0 t}$$

5) $M \in$ cône : $r(t) = \alpha z(t)$

avec $R = \alpha H$ soit $r(t) = \frac{R}{H} z(t)$

$$\boxed{r(t) = R - V_0 \frac{R}{H} t.}$$

6) Le mouvement étant uniforme on a

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

avec $\frac{dz}{dt} = -V_0$ et $\frac{dr}{dt} = -V_0\frac{R}{H}$

D'où $r^2(t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 - V_0^2\left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right)$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{V^2 - V_0^2(1 + R^2/H^2)}}{R\left(1 - \frac{V_0}{H}t\right)}}$$

7) On a $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-AV_0R/H}{R - V_0\frac{R}{H}t}\left(-\frac{H}{RV_0}\right)$

On intègre par rapport au temps

$$\theta(t) = -\frac{HA}{RV_0}\ln\left(R - V_0\frac{R}{H}t\right) + C_2$$

avec $\theta(0) = 0 = -\frac{HA}{RV_0}\ln R + C_2$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{HA}{RV_0}\ln\frac{1}{1 - \frac{V_0}{H}t}}$$

8) $\theta(r) = \frac{HA}{RV_0}\ln\frac{R}{r}$

$$\boxed{r(\theta) = R\,e^{-\frac{RV_0}{HA}\theta}}$$

9] τ = durée de la chute

On a $z(t) = H - V_0 t$

à $t = \tau$ $z(\tau) = 0 = H - V_0 \tau$ $\boxed{\tau = \dfrac{H}{V_0}}$

AN : $\tau = \dfrac{8}{0,25} = 32\ \mathrm{s}$

Le mouvement étant uniforme $\boxed{d = V\tau}$

AN $d = 1,2 \times 32$ $d = 38,4\ \mathrm{m}$

B – Dynamique du point

Exercice 1 Flocon de neige, goutte d'eau et bulle

1. Chute d'un flocon

Système étudié : flocon de neige N de volume V

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et de masse $m = \rho . V$

Référentiel terrestre supposé galiléen

1] Bilan des forces s'exerçant sur N :

- $\vec{P}$ son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
$= mg\,\vec{u_z}$
avec $\vec{u_z}$ vecteur unitaire vertical descendant
$\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\, \vec{u_z}$

- $\vec{\Pi_a}$ la poussée d'Archimède
$\vec{\Pi_a} = -\rho_a V \vec{g}$
$= -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a\, \vec{u_z}$

- $\vec{F}$ la force de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$
avec $\vec{v} = v\,\vec{u_z}$

Soit $\vec{R}$ la résultante des forces

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi_a} + \vec{F}$

$= mg\,\vec{u_z} - \rho_A V\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$

$$\boxed{\vec{R} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho - \rho_a) g - 6\pi\eta R v\right)\vec{u_z}}$$

2] D'après la 2ème loi de Newton

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi_a} + \vec{F}$

Soit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_a)\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$

$\vec{P}$ et $\vec{\Pi}_a$ sont selon $\vec{e_z}$; $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ tout se passe selon $\vec{e_z}$

$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta R v + \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_a) g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta}{\frac{4}{3}\pi R^2 \rho} v = \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g}$$

On a bien $\dfrac{dv}{dt} + \alpha v = \beta$

avec $\alpha = \dfrac{6\pi\eta}{\frac{4}{3}\pi R^2 \rho}$ $\boxed{\alpha = \dfrac{9\eta}{2\rho R^2}}$

et $\boxed{\beta = \left(1 - \dfrac{\rho_a}{\rho}\right) g}$

3) Soit v_∞ la vitesse limite acquise par ce flocon lors de sa chute. On a alors $\dfrac{dv}{dt} = 0$.

D'où $\boxed{v_\infty = \dfrac{\beta}{\alpha}}$ $v_\infty = \dfrac{(1 - \frac{\rho_a}{\rho}) g}{9\eta} \cdot 2\rho R^2$

$v_\infty = 2,7 \text{ m s}^{-1}$ ou $v_\infty = 9,7 \text{ km h}^{-1}$

4) Par définition $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$ $\mathcal{P} = -6\pi\eta R v^2$

Extrait de X MP 2008 :

2. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

Temps de transit de gouttes d'eau

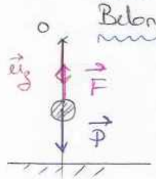
a) Système étudié = goutte d'eau sphérique indéformable

$$m = \rho V = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids

$\vec{F} = -6\pi\eta \dfrac{a}{1 + l/a}\vec{v}$ la traînée



D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} \quad \text{avec } \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} + 6\pi\eta a \frac{\vec{v}}{1 + l/a} = m\vec{g}$$

Selon $\vec{e_z}$ $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{6\pi\eta}{m}\dfrac{a}{1 + \frac{l}{a}} v = g.$

Soit $\vec{V}_{lim}$ la vitesse limite de chute

$$\vec{V}_{lim} = \frac{m\vec{g}}{6\pi\eta a}\left(1 + \frac{l}{a}\right) \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}\right)$$

b) Pour $a_1 = 0,01$ mm $V_{lim_1} = \dfrac{\rho \frac{4}{3}\pi a_1^3 g}{6\pi\eta a_1}\left(1 + \dfrac{l}{a_1}\right)$

$V_{lim_1} = \dfrac{2a_1^2 g \rho}{9\eta}\left(1 + \dfrac{l}{a_1}\right)$ $V_{lim_1} = 1,29\ 10^{-2}\text{ ms}^{-1}$

$V_{lim_2} = 1,28\ 10^{0}\text{ ms}^{-1}$

c) Soit τ le temps caractéristique du régime transitoire

$$\tau = \frac{1 + l/a}{6\pi\eta a}\rho\frac{4}{3}\pi a^3 = \left(1 + \frac{l}{a}\right)\frac{\rho 2a^2}{9\eta}$$

$$\tau_1 = \left(1 + \frac{7\,10^{-8}}{1\,10^{-5}}\right) \frac{10^3 \; 2 \,.\, 10^{-10}}{9.\,1{,}7.\,10^{-5}} \qquad \tau_1 = 1{,}3 \text{ ms}.$$

$$\tau_2 = \left(1 + \frac{7\,10^{-8}}{10^{-4}}\right) \frac{10^3 \times 2 \times 10^{-8}}{9 \times 1{,}7 \times 10^{-5}} \qquad \tau_2 = 131 \text{ ms}$$

$\Rightarrow$ On peut considérer le mouvement des gouttes comme uniforme.

$$T_1 = \frac{H}{V_{lim_1}} \qquad T_1 = 6{,}2\,10^5 \text{ s} = 172 \text{ h} \;!$$

$$T_2 = \frac{H}{V_{lim_2}} \qquad T_2 = 6{,}2\,10^3 \text{ s}$$

d. Pour des bulles

$$m = \rho V' \quad \text{avec} \quad V' = \frac{4}{3}\pi\left(a_2^3 - (0{,}9a_2)^3\right)$$

$$V_{lim} = \frac{4}{3}\pi a_2^{\cancel{3}\,2}\left[1 - 0{,}9^3\right] g \,\frac{1 + l/a_2}{6\pi\eta \cancel{a_2}}$$

$$T' = 2{,}3\,10^4 \text{ s}$$

3. Chute d'une goutte

Accrétion. On néglige $\vec{F}$.

a) PFD $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P}$ avec $\vec{p}(t) = m(t)\,\vec{v}(t)$

D'où $\dfrac{dm}{dt} v + m\dfrac{dv}{dt} = mg$

$$\underbrace{\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}}_{\lambda v} v + \frac{dv}{dt} = g$$

Soit $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \lambda v^2 = g}$

On pose $v_{lim} = \sqrt{\dfrac{g}{\lambda}}$

On a $\dfrac{dv}{dt} = \lambda\left(v_{lim}^2 - v^2\right)$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v_{lim}^2 - v^2} = \lambda \qquad \text{pour } v \neq v_{lim}.$$

Décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{v_{lim}^2 - v^2} = \frac{\alpha}{v_{lim} + v} + \frac{\beta}{v_{lim} - v}$$

$$= \frac{\alpha v_{lim} - \alpha v + \beta v_{lim} + \beta v}{v_{lim}^2 - v^2}$$

D'où $\alpha = \beta = 1/2v_{lim}$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v_{lim}+v} + \frac{\frac{dv}{dt}}{v_{lim}-v} = 2 v_{lim}\, d$$

$$\ln \frac{v+v_{lim}}{v_{lim}-v} = 2 v_{lim}\, d\, t + A$$

avec à $t=0$ $v=0$ $\Rightarrow A = 0$

$$\frac{v(t)+v_{lim}}{v_{lim}-v(t)} = e^{2\sqrt{gd}\,t}$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) + v_{lim} = v_{lim}\, e^{2\sqrt{gd}\,t} - v(t)\, e^{+2\sqrt{gd}\,t}$$

$$v(t) = v_{lim}\, \frac{e^{2\sqrt{gd}\,t} - 1}{e^{2\sqrt{gd}\,t} + 1}.$$

$$v(t) = v_{lim} \times \mathrm{th}\, \sqrt{gd}\; t$$

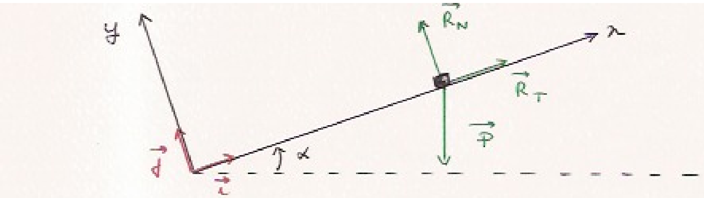
(b) τ_v temps caractéristique d'évolution de la vitesse $\tau_v = \frac{1}{\sqrt{gd}}$

et $v_{lim} = \sqrt{g/d}$

(c) $\tau_v = 14\ s$

$v_{lim} = 140\ ms^{-1}$

Exercice 2 Mesure d'un coefficient de frottement



(1) Le système "petit morceau de verre" dans le référentiel d'étude considéré galiléen est immobile.

D'après la 2ème loi de Newton $\vec{O} = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

Sur $\vec{i}$: $\quad 0 = -mg \sin\alpha + R_T$

Sur $\vec{j}$: $\quad 0 = -mg \cos\alpha + R_N$

$$\boxed{\begin{aligned} R_T &= mg \sin\alpha \\ R_N &= mg \cos\alpha \end{aligned}}$$

(2) Pour que le morceau de verre ne glisse pas, il faut :

$$\| \vec{R}_T \| \leq \mu \| \vec{R}_N \|$$

soit $\quad mg \sin\alpha < \mu mg \cos\alpha \qquad \boxed{\tan\alpha \leq \mu.}$

(3) A la limite $\quad \tan\alpha = \mu \qquad \mu = \tan 35°$

$\mu = 0{,}70.$

4. $\alpha = 45°$, le morceau de verre glisse et $R_t = \mu R_N$.

D'après la 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

Sur $\vec{i}$: $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + R_T$

Sur $\vec{j}$: $m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + R_N = 0$.

soit $R_N = mg\cos\alpha$ et $R_T = \mu\, mg\cos\alpha$.

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$$

$$\dot{x}(t) = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\,t + 0.$$

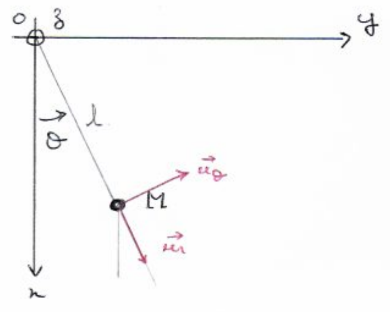
$$\boxed{x(t) = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\frac{t^2}{2} + x_0}$$

Remarque : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \mu$. x décroît (logique).

Exercice 3 Pendule

Extrait d'ENSTIM 1996

A. Le pendule simple non amorti.



Considérons le système point matériel M de masse m dans le référentiel R galiléen.

Forces : • $\vec{T} = -T\vec{u_r}$ la tension du fil

• $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_x} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

I 1.2) On projette la 2ème loi de Newton sur le repère polaire $(O;\vec{u_r};\vec{u_\theta})$

$$m a_r = -T + mg\cos\theta$$
$$m a_\theta = -mg\sin\theta.$$

avec $\vec{OM} = l\vec{u_r}$ $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta} - l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u_r}$$

Soit $\boxed{ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\sin\theta = 0}$

I 1.3) Pour de faibles élongations $\sin\theta \simeq \theta$

d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta = 0} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ A et B constantes d'intégration.

A $t=0$ $\quad \theta(t=0) = \theta_0 = A$
$\quad \dot{\theta}(t=0) = 0 = +B\omega_0$

d'où $\underline{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

B. L'oscillateur amorti.

(2.1) On considère le point mobile M dans un référentiel R galiléen. Il est soumis à :

- $\vec{P} = m\vec{g}$ son poids
- $\vec{T} = -T\vec{u_r}$ tension du fil
- $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ frottements.

D'après la 2ème loi de Newton on a :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$$

sur $\vec{u_\theta}$: $ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - \alpha l\dfrac{d\theta}{dt}$

soit $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{\alpha}{m}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{g}{l}\theta = 0}$ pour $\sin\theta \simeq \theta$

où $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{2}{\tau}\dfrac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$ (1)

avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$ et $\dfrac{2}{\tau} = \dfrac{\alpha}{m}$ $\boxed{\tau = \dfrac{2m}{\alpha}}$

τ temps caractéristique de l'amortissement.

(2.2) Soit $r^2 + \dfrac{2}{\tau}r + \omega_0^2$ l'équation caractéristique associée à (1)

$$\Delta = \frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2$$

Pour avoir un régime pseudo-périodique il faut $\Delta < 0$ soit $\omega_0^2 > \dfrac{1}{\tau^2}$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{\omega_0^2\tau^2}}}$ pseudo-pulsation.

$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \dfrac{1}{\omega_0^2\tau^2}\right)^{-1/2}}$ pseudo-période

$$\theta(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$$

$\delta = \ln\dfrac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \ln e^{T/\tau} = \dfrac{T}{\tau}$ $\boxed{\delta = \dfrac{T}{\tau}}$

(2.3) a) $\delta = \ln\dfrac{\theta(B)}{\theta(C)}$ $\delta = 0{,}110$

b) $T = \dfrac{t(D) - t(A)}{7}$ $T = 1{,}1$ s

c) $\tau = \dfrac{T}{\delta}$ $\tau = 10$ s

d) $\alpha = \dfrac{\tau}{2m}$ $\alpha = 0{,}054$ N m^{-1} s

C – Énergie

Exercice 1 Voiture réduite à un point matériel

Voiture réduite à 1 point matériel

Système étudié : véhicule assimilé à 1 pt M de masse m
Référentiel terrestre galiléen

A. Marche avant à puissance constante

A1) Action : moteur développant une puissance constante P_0

$\vec{OM} = x\,\vec{u_x}$ vecteur position

D'après le théorème des puissances cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = P_0 \qquad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v(t)^2$$

Soit $E_c(t) = P_0 t + 0$ (à $t=0$ $\vec{v}(0)=\vec{0}$)

$$\frac{1}{2} m v^2(t) = P_0 t$$

$$\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{2P_0 t}{m}}}$$

Soit $\gamma(t)$ l'accélération $\gamma(t) = \frac{dv}{dt}$

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m}} \times \frac{1}{2} t^{-1/2}$$

$$\boxed{\gamma(t) = \sqrt{\frac{P_0}{2mt}}}$$

ou $\frac{dE_c}{dt} = m v(t)\,\gamma(t) = P_0$.

$$\gamma(t) = \frac{P_0}{m} \times \sqrt{\frac{m}{2P_0 t}}$$

On a $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2P_0}{m}}\, t^{1/2}$

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P_0}{m}}\, t^{3/2}} + 0 \qquad \text{à } t=0 \ x(0)=0.$$

A2)
$$t^{1/2} = \sqrt{\frac{m}{2P_0}}\, v(t)$$

$$x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P_0}{m}} \left(\frac{m}{2P_0}\right)^{3/2} v^3(t).$$

$$\boxed{x(v) = \frac{2}{3}\,\frac{m}{2P_0}\, v^3(t)} \leftarrow m^3 s^{-3}$$

$\uparrow$ kg m s^{-2} m s^{-1}

$$x(t) = \frac{m}{3P_0} v^3(t)$$

A3)
$$x_{90\,km/h} = \frac{1{,}2\ 10^3}{3{,}75\ 10^3}\left(\frac{90\ 10^3}{3{,}6\ 10^3}\right)^3 = 83 \text{ m}.$$

B. Prise en compte des forces de frott.

$$\|\vec{f}\| = k m v^2$$

B1) TEC entre t et $t+dt$:

$$dE_c = (P_0 - kmv^3)\,dt \qquad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$dE_c = m v\, dv$$

D'où $m v \frac{dv}{dt} = P_0 - kmv^3$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m v^2\, dv}{P_0 - kmv^3} = v\, dt = dx$$

B.2) On a $dx = \frac{m v^2 dv \cdot 3k}{P_0 - mkv^3} \times \frac{1}{3k}$

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{3k}\left[-\ln(P_0 - mkv^3)\right]_0^t$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{3k}\ln\frac{P_0}{P_0 - mkv^3}}$$

B.3) V_∞ vitesse limite est telle que $E_c = \text{cste}$

soit $dE_c = 0 \Leftrightarrow mkV_\infty^3 = P_0 \Leftrightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt[3]{\frac{P_0}{mk}}}$

B.4) $$\boxed{x(v) = \frac{1}{3k}\ln\frac{V_\infty^3}{V_\infty^3 - v^3}}$$

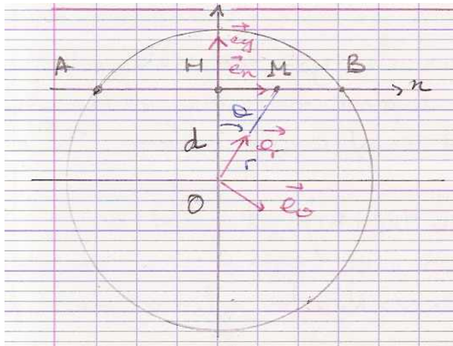
B.5) $k = \frac{1}{3x}\ln\frac{V_\infty^3}{V_\infty^3 - v^3}$ $\qquad k =$

On a $k = \frac{P_0}{mV_\infty^3}$ $\qquad k = \frac{75\,\cancel{10^3}}{1{,}2\,\cancel{10^3}\times\left(\frac{180\,\cancel{10^3}}{3{,}6\,\cancel{10^3}}\right)^3}$

$$k = 5{,}0\ 10^{-4}\ m^{-1}$$

B6) $X = \frac{1}{3k}\ln\frac{V_\infty^3}{V_\infty^3 - v^3}$ $\qquad X = 89$ m.

Exercice 2 Tunnel terrestre



1) M est soumis à

$$\vec f = -mg_0\frac{r}{R}\vec{e_r}$$

avec $\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$

$\delta W(\vec f)$ = travail élémentaire de cette force

Si cette force dérive d'une énergie potentielle on a alors

$$\delta W(\vec f) = -dE_p$$

Or $\delta W(\vec f) = \vec f \cdot d\vec{OM}$ avec $d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\vec{e_r}$ et $d\vec{e_r} \perp$ à $\vec{e_r}$

D'où $\vec f \cdot d\vec{OM} = -mg_0\frac{r}{R}dr = -dE_p$

$$\frac{dE_p}{dr} = +mg_0\frac{r\,dr}{R}$$

$$\boxed{E_p(r) = mg_0\frac{r^2}{2R} + \text{cste}}$$

avec $E_p(0) = 0 = \text{cste}$

$$\boxed{E_p(r) = \frac{mg_0 r^2}{2R}}$$

2. En A : $r = R$ $\boxed{E_p(A) = +\frac{mg_0 R}{2}}$

3. On étudie le système véhicule assimilé à 1 point matériel dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à

$\vec{f}$ l'attraction terrestre

$\vec{R}$ action du tunnel $\perp$ au déplacement car le véhicule glisse sans frottement.

$\vec{OM} = d\,\vec{e_y} + x\,\vec{e_x}$

On a $r = \sqrt{d^2 + x^2}$

D'où $\boxed{E_p(x) = \frac{mg_0}{2R}(d^2 + x^2)}$

4. $\vec{R}$ ne travaille pas et $\vec{f}$ est 1 force conservative donc, d'après le théorème de l'énergie mécanique

$dE_m = 0$

$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$

Avec, par définition $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

D'où $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg_0}{2R}(d^2 + x^2) = E_p(A)$

v est maximale quand $E_p(x)$ est minimale donc pour $x = 0$

On a $\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_m^2 + \frac{\cancel{m}g_0}{\cancel{2}R}d^2 = \frac{\cancel{m}g_0}{\cancel{2}}R$

$v_m^2 = g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)$

$\boxed{v_m = \sqrt{g_0 R}\sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}}$ $v_m = 5{,}0\,10^3\,\text{ms}^{-1}$

5. On a $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{mg_0}{2R}(d^2 + x^2) = E_p(A)$

En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient

$\cancel{m}\dot{x}\ddot{x} + \frac{\cancel{m}g_0}{R}\dot{x}x = 0$

Soit $\boxed{\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0}$.

$x(t)$ est de la forme

$x(t) = A\cos\sqrt{\frac{g_0}{R}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g_0}{R}}\,t$

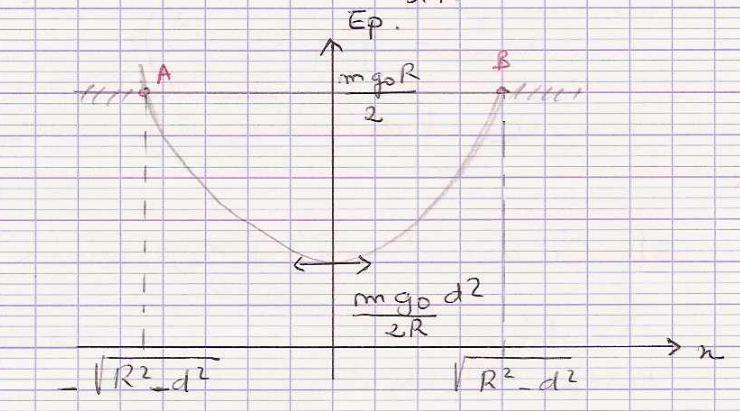
avec $x(0) = -\sqrt{R^2 - d^2}$ et $\dot{x}(0) = 0 = B\sqrt{\frac{g_0}{R}}$

$\boxed{x(t) = -\sqrt{R^2 - d^2}\cos\sqrt{\frac{g_0}{R}}\,t}$

$\dot{x}(t) = +\sqrt{R^2 - d^2}\sqrt{\frac{g_0}{R}}\sin\sqrt{\frac{g_0}{R}}\,t$

$v_m = \sqrt{g_0 R}\sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}$ ok

6) On a $E_p(x) = \dfrac{m g_0}{2R}\left(d^2 + x^2\right)$



M va osciller de manière harmonique entre A et B

7) On a $AB = 400\,\text{km}$.

$d + p = R \Leftrightarrow d = R - p$.

et $d^2 + \dfrac{AB^2}{4} = R^2$

$R - p = \sqrt{R^2 - \dfrac{A^2B^2}{4}}$

$p = R - \sqrt{R^2 - \dfrac{A^2B^2}{4}}$

$= R\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{A^2B^2}{4R^2}}\right) \simeq \dfrac{A^2B^2}{8R}$

$p = 3{,}1\ \text{km}$

$v_m = \sqrt{g_0 R\left(1 - \dfrac{d^2}{R^2}\right)} = \sqrt{\dfrac{g_0}{R}\underbrace{(R-d)}_{p}\underbrace{(R+d)}_{2R}} = \sqrt{2 g_0 p}$

$v_m = 245\ \text{m s}^{-1}$
$= 896\ \text{km h}^{-1}$!

D – Loi du moment cinétique

Exercice 1 Palet sur demi-sphère

1. — Système : palet M supposé ponctuel.
   — Référentiel : terrestre supposé galiléen.
   — Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction du support R_N normale au support car il n'y a pas de frottements.
2. Par définition, $\vec{L}_O(A) = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}_0 = \vec{0}$ car $\vec{v}_0 = \vec{0}$.
3. Par définition, $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, avec $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, et
   $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
   D'où $$\boxed{\vec{L}_O(M) = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z}$$
4. Par définition : $\vec{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{e}_r \wedge mg(-\cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$
   $$\boxed{\vec{M}_O(\vec{P}) = +Rmg\sin\theta\vec{e}_z.}$$
   De même $\vec{M}_O(\vec{R}_N) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}_N = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{R}_N$ sont colinéaires.
   $$\boxed{\vec{M}_O(\vec{R}_N) = \vec{0}.}$$
5. D'après le théorème du moment cinétique en O fixe dans le référentiel d'étude :
   $$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R}_N)$$
   D'où $mR^2\ddot{\theta} = Rmg\sin\theta$.

   Équation différentielle du mouvement :
   $$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$
6. D'après le théorème de l'énergie cinétique entre les point A et M :
   $$E_c(M) - E_c(A) = W_{A\to M}(\vec{P}) + W_{A\to M}(\vec{R}_N)$$
   avec $E_c(M) = \dfrac{1}{2}mv^2$, $E_c(A) = 0$, $W_{A\to M}(\vec{R}_N) = 0$ car $\vec{R}_N$ est perpendiculaire au déplacement et
   $W_{A\to M}(\vec{P}) = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{P} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot \vec{P} = mg(R - R\cos\theta)$.

D'où $\dfrac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$,

$$\boxed{v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}}$$

7. On a $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}\vec{e}_\theta$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}}$$

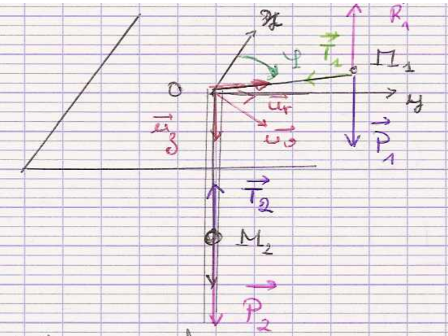
8. D'après la deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$ avec $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.
Selon $\vec{e}_r$: $-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N$, soit $R_N = -mR\dfrac{2g}{R}(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$

$$\boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

9. Le palet quitte le dôme lorsque R_N s'annule, soit $3\cos\theta_m = 2$,

$$\boxed{\cos\theta_m = \frac{2}{3}}$$

Exercice 2 Point matériel sur un plan



Référentiel de la table galiléen

1) Bilan des forces.

Sur M_1 : $\vec{P}_1 = m\vec{g}$ poids de M_1
$\vec{R}_1 = R_1\vec{e}_z$ action normale de la table sans frottement
$\vec{T}_1 = -T_1\vec{e}_r$ action de fil

Sur M_2 : $\vec{P}_2 = m\vec{g}$ poids de M_2
$\vec{T}_2$ = action du fil
$\vec{R}_2 = \vec{0}$ action du tube vertical.

2) Deuxième loi de Newton pour M_1.

$$m\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1$$

avec $\overrightarrow{OM_1} = r\vec{u}_r$

$$\vec{v}_1 = \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

D'où
$$\boxed{\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -T_1 \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \\ 0 = mg - R_1 \end{cases}}$$

Deuxième loi de Newton pour M_2.

$$m\vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_2$$

$$\boxed{m\ddot{z} = mg - T_2.}$$

3. $\vec{\sigma}_O(M_1) = \vec{OM}_1 \wedge m\vec{v}_1$

$= r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{u_\varphi})$

$\vec{\sigma}_o(M_1) = m r^2 \dot{\varphi}\, \vec{e_z}$

$\vec{\sigma}_o(M_2) = \vec{OM}_2 \wedge m\vec{v}_2 = \vec{0}$

4. D'après le théorème du moment cinétique pour le pt M_1 en O fixe

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(M_1)}{dt} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{T}_1 + \vec{OM}_1 \wedge \underbrace{(\vec{P}_1 + \vec{R}_1)}_{=\vec{0}}$$

$= \vec{0}$

Donc $\vec{\sigma}_o(M_1) = \vec{cte} = r^2\dot{\varphi}\, m\, \vec{e_z}$

$r^2\dot{\varphi} = C$ constante

$= r_o^2\omega_o$.

$$\dot{\varphi} = \omega_o \frac{r_o^2}{r^2}$$

5. On a • $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$

• $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -T_1$

• $m\ddot{z} = mg - T_2$

• $z + r = L \iff \ddot{z} = -\ddot{r}$

D'où $\ddot{r} - r\omega_o^2 \dfrac{r_o^4}{r^4} = -g + \ddot{z}$

$= -g - \ddot{r}$

$\iff 2\ddot{r} - \dfrac{\omega_o^2 r_o^4}{r^3} = -g.$

$$\iff \boxed{2\ddot{r} - \frac{K}{r^3} = -g}$$

avec $\boxed{K = \omega_o^2 r_o^4}$

6. M_1 décrit un mouvement circulaire $\ddot{r} = 0$.

$$\omega_o^2 = \frac{g}{r_o} \qquad \boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{g}{r_o}}}$$

E – Solide

Exercice 1 Roue de vélo

1) $J_\Delta = mR^2$ moment d'inertie de la roue

$J_\Delta = 0,17 \text{ kg m}^2$.

2) $\mathcal{M}_\Delta(2\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(2\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$

$= (\vec{OP} \wedge 2\vec{F}) \cdot \vec{e}_y$

$= -2FR$

3) On étudie le système roue dans le référentiel terrestre galiléen. Il est soumis à
$\vec{P}$ son poids point d'application O.
$\vec{R}$ action de l'axe de rotation
$2\vec{F}$ action des freins

D'après le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ

$$\frac{d\sigma_\Delta(\text{roue})}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P} + \vec{R} + 2\vec{F})$$

$$= -2FR$$

Avec $\sigma_\Delta(\text{roue}) = J_\Delta \dot{\theta}$

D'où $J_\Delta \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = -2FR$. $\boxed{\ddot{\theta} = -\dfrac{2F}{mR}}$

4) $\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = -\dfrac{2FR}{mR^2}$

$\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = -\dfrac{2F}{mR}$

D'où $\dot{\theta}(t) = -\dfrac{2F}{mR} t + \text{cte}$

avec $\dot{\theta}(0) = \omega_0 = \text{cte}$.

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{2F}{mR} t}$$

D'où $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t - \dfrac{F}{mR} t^2 + 0}$.

5) On veut $\dot{\theta}(t_f) = 0 \implies t_f = \dfrac{mR\omega_0}{2F}$.

et $\theta(t_f) = 2\pi$.

soit $2\pi = \dfrac{mR\omega_0^2}{2F} - \dfrac{F}{mR} \times \dfrac{m^2R^2\omega_0^2}{4F^2}$

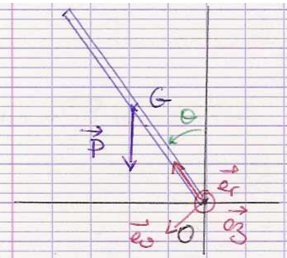
$= + \dfrac{mR\omega_0^2}{4F}$ $\boxed{F = \dfrac{mR\omega_0^2}{8\pi}}$

$F = 4,7 \text{ N}$

6) Avant le freinage $v = R\omega_0$.

$v = 5,0 \text{ m s}^{-1}$
$= 18 \text{ km h}^{-1}$.

Exercice 2 Chute d'un cheminée



Σ = cheminée $\mathcal{S}$

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces

* Poids $\vec{P} = M\vec{g}$ en G
* $\vec{R}$ action de la liaison pivot en O.

1) D'après le théorème du moment cinétique en O

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(\mathcal{S})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R})}_{=0}$$

car pivot parfait

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \frac{D}{2}\vec{e}_r \wedge M\vec{g}$$

$$= \frac{D}{2} M g \sin\theta \, \vec{e}_z$$

De plus $\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}) = J_O \dot{\theta} \, \vec{e}_z$

D'où $J_O \ddot{\theta} = \frac{D}{2} M g \sin\theta \iff \ddot{\theta} = \frac{3g}{2D}\sin\theta$

2) D'un point de vue énergétique

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2$$

et $E_{pp} = Mg\cos\theta + cte.$

L'action pivot étant parfaite, elle ne travaille pas. Il y a conservation de l'énergie mécanique de la cheminée

$$E_m = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 + M g \cos\theta \frac{D}{2} + cte = E_{m_0}$$

$$J_O \ddot{\theta} - Mg\sin\theta \frac{D}{2} = 0.$$

avec $J_O = \frac{1}{3} M D^2$ $\qquad \ddot{\theta} - \frac{3g}{2D}\sin\theta = 0$

3) D'après le principe de la résultante cinétique

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{R}$$

avec $\vec{OG} = \frac{D}{2}\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \frac{D}{2}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(G) = -\frac{D}{2}\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \frac{D}{2}\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

Sur $\vec{e}_r$ $\qquad -M\frac{D}{2}\dot{\theta}^2 = -Mg\cos\theta + R_r$

Sur $\vec{e}_\theta$ $\qquad M\frac{D}{2}\ddot{\theta} = Mg\sin\theta + R_\theta$

On obtient $R_\theta = \frac{MD}{2}\ddot{\theta} - Mg\sin\theta$

$= \frac{M\cancel{D}}{2}\left(\frac{3g}{2\cancel{D}}\sin\theta\right) - Mg\sin\theta$

$= Mg\sin\theta\left(\frac{3}{4} - 1\right)$

$R_\theta = -\frac{1}{4}Mg\sin\theta$.

De même $R_r = +Mg\cos\theta - \frac{1}{2}MD\dot{\theta}^2$

Or $E_m = \frac{1}{6}MD^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgD\cos\theta = \text{cste}$

avec à $t=0$ $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$.

Soit $\frac{1}{6}D\dot{\theta}^2 + \frac{g}{2}\cos\theta = \frac{g}{2}$

$MD\dot{\theta}^2 = 3gM(1-\cos\theta)$

$R_r = Mg\cos\theta - \frac{3}{2}Mg(1-\cos\theta)$

$R_r = Mg\left(\frac{5}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\right)$

4- a- Σ étudié = longueur d de cheminée de masse $m = \frac{M}{D}d$

de centre de masse I tel que $OI = d/2$

Bilan des forces : Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ en I

$\vec{R}$ en O

$\vec{S}$ en P.

TRC : $m\vec{a}(I) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{S}$

avec $\vec{OI} = \frac{d}{2}\vec{e_r}$ $\quad \vec{v}(I) = \frac{d}{2}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a}(I) = -\frac{d}{2}\dot{\theta}^2\vec{e_r} + \frac{d}{2}\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{P} = m\vec{g} = M\frac{d}{D}g\left(-\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta}\right)$

Selon $\vec{e_\theta}$: $M\frac{d}{D}\frac{d}{2}\ddot{\theta} = M\frac{d}{D}g\sin\theta + R_\theta + S_\theta$

$S_\theta = M\frac{d}{D}\left(\frac{d}{2}\frac{3g}{2D}\sin\theta - g\sin\theta\right) + \frac{1}{4}Mg\sin\theta$

$S_\theta = Mg\sin\theta\left[\frac{3d^2}{4D^2} - \frac{d}{D} + \frac{1}{4}\right]$

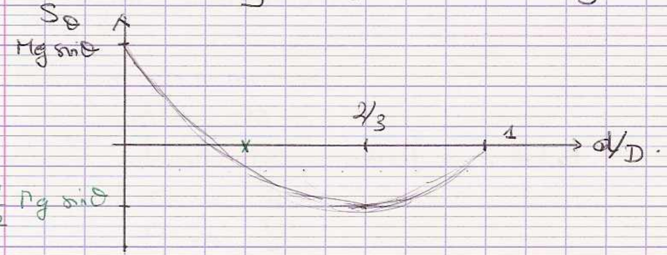
b. On pose $x = \frac{d}{D}$ $\quad x \in [0,1]$.

$\frac{f}{4}(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{1}{4}$

$\frac{df}{dx} = 6x - 4 \quad \frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$f(0) = 1 \quad f(1) = 0$.

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\times\frac{4}{9} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$.



5. L'effet de cisaillement est le $\oplus$ important au pied de la cheminée.

6. TMC en O pour la longueur d de la cheminée

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{S} + \vec{R} + \vec{P}) + \mathcal{C}\vec{e}_z$$

$$= S_\theta d\,\vec{e}_z + M\frac{d}{D} g \frac{d}{2}\sin\theta\,\vec{e}_z + \mathcal{C}\vec{e}_z$$

avec $\vec{J}_O = \frac{1}{3} M \frac{d}{D} d^2 \dot{\theta}\,\vec{e}_z$

D'où $\frac{1}{3} M \frac{d^3}{D}\frac{3g}{2D}\sin\theta = Mgd\sin\theta\left[\frac{3d^2}{4D^2} - \frac{d}{D} + \frac{1}{4}\right] + Mg\frac{d^2}{2D}\sin\theta + \mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = Mgd\sin\theta\left[\frac{d^2}{2D^2} - \frac{3d^2}{4D^2} + \frac{d}{D} - \frac{1}{4} - \frac{d}{2D}\right]$$

$$\mathcal{C} = Mgd\sin\theta\left[-\frac{1}{4}\frac{d^2}{D^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{D} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}Mgd\sin\theta\left(\frac{d^2}{D^2} - 2\frac{d}{D} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4}Mgd\sin\theta\left(\frac{d}{D} - 1\right)^2$$

7. $\mathcal{C} = -\frac{1}{4} MgD\sin\theta \underbrace{x(x-1)^2}_{g(x)}$

$$\frac{dg}{dx} = (x-1)^2 + x\,2(x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2x$$

$$= 3x^2 - 4x + 1$$

$\frac{dg}{dx} = 0 \iff 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$x = \frac{4}{6} \pm \frac{2}{6} = 1$ ou $\frac{1}{3}$.

$\cancel{\frac{d}{dx}g(0) = 1}$ $\quad g(1) = 0$.

$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{9} - \frac{4}{3} + 1 = 0$.

g est max pour $d = \frac{1}{3}D$.

F – Forces centrales conservatives

Exercice 1 Étude de la comète 67P Churyomov – Gerasimenko

1. On étudie le mouvement d'une comète de masse m dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen. Elle est soumise à l'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil : $\vec{f} = -\mathscr{G}\frac{M_\odot m}{r^2}\vec{e}_r$.

   Repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

   Éléments cinématiques :
   - $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, avec R rayon de l'orbite circulaire,
   - $\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$, vitesse
   - $\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta$, accélération.

   D'après le principe fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{f}$, soit $m\left(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r\right) = -\frac{\mathscr{G}mM_\odot}{R^2}\vec{e}_r$, soit $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta}^2 R = \frac{\mathscr{G}M_\odot}{R^2}$.

On en déduit que $\dot\theta = \text{cte} = \frac{2\pi}{T}$, soit $T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{\mathcal{G}M_\odot}$.

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}}$$

Pour Chury, en remplaçant R par a, on obtient $T = 6,5$ ans.

2. Repère sphérique, $\overrightarrow{OM} = \vec r = r\vec e_r$.

Par définition, $\boxed{\vec\sigma_S = \vec r \wedge m\vec v}$

D'après le théorème du moment cinétique en S centre du Soleil fixe dans le référentiel d'étude, $\frac{d\vec\sigma_S}{dt} = \vec r \wedge \left(-\frac{\mathcal{G}mM_\odot}{r^3}\vec r\right) = \vec 0$ (produits vectoriels entre vecteurs parallèles). $\vec\sigma_S$ est donc constant et $\vec r$ est perpendiculaire à ce vecteur constant, **la trajectoire est donc plane** dans le plan perpendiculaire à $\vec\sigma_S$ et passant par S.

On utilise alors le repère polaire, $\vec r = r\vec e_r$ et $\vec v = \dot{\vec r} = \dot r\vec e_r + r\dot\theta\vec e_\theta$.

$$\vec\sigma_S = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} \dot r \\ r\dot\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot\theta \end{pmatrix}$$ de norme $mr^2\dot\theta$ pour $\dot\theta > 0$ et donc

$$\boxed{\mathcal{C} = r^2\dot\theta}$$

3. Par définition de l'énergie mécanique, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r}$

avec $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 = \dot r^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^{\ 2}}$, d'où $E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + \frac{\mathcal{C}}{r^{\ 2}}\right) - \frac{\mathcal{G}mM_\odot}{r}$

On en déduit $\frac{1}{2}m\dot r^2 = E_m - E_{eff}(r)$ avec

$$\boxed{E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_\odot}{r}}$$

1) Système étudié = comète de masse m

Référentiel d'étude = héliocentrique galiléen

Bilan des forces : $\vec f = -G\frac{M_\odot m}{r^2}\vec{e_r}$ interaction gravitationnelle exercée par le Soleil.

Éléments cinématiques :

$\vec{OM} = R\vec{e_r}$ $\quad R$ = rayon de l'orbite circulaire

$\vec v = R\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$

$\vec a = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e_r} + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e_\theta}$

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD)

$m\vec a = \vec f$

Soit $-mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -G\frac{M_\odot m}{r^2}$

or $mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ $\quad \frac{d\theta}{dt} = cte = \frac{v}{R}$

Le mouvement est uniforme.

$-m\frac{v^2}{R} = -G\frac{M_\odot m}{R^2}$ $\quad v^2 = \frac{GM_\odot}{R}$

avec $v^2 = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2$

Soit $\frac{4\pi^2R^2}{T^2} = \frac{GM_\odot}{R}$

$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}}$$

Pour la comète Cherry

$$T_c^2 = \frac{4\pi^2 a_c^3}{G M_\odot} = \frac{8\pi^3 a_c^3}{2\pi G M_\odot}$$

$$T_c^2 = \frac{(33 \times 10^{11})^3}{2\pi \cdot 2\,10^{30} \cdot 6{,}7\,10^{-11}}$$

$$= 5\,10^{16}\ \text{s} \qquad T_c = 6{,}5 \text{ ans.}$$

2) $\vec{\sigma}_S$ = moment cinétique de la comète par rapport au Soleil

Par définition $\vec{\sigma}_S = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

avec $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$$\boxed{\vec{\sigma}_S = m r^2 \dot{\theta}\, \vec{e_z}}$$

D'après le TMC $\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \vec{0}$

$\vec{\sigma}_S = \vec{cte}$

or $\vec{\sigma}_S \perp$ à $\vec{SM}$ donc $\vec{SM}$ est dans le plan $\perp$ à $\vec{\sigma}_S$ passant par S. Le mvt est plan.

$$C = \frac{\|\vec{\sigma}_S\|}{m} = r^2\dot{\theta}$$

3) Soit E_m l'énergie mécanique de la comète.

Par définition $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p$

avec $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$

or $E_p(r) = -\frac{G M_\odot m}{r}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - G\frac{M_\odot m}{r}$$

Soit $\boxed{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r)}$

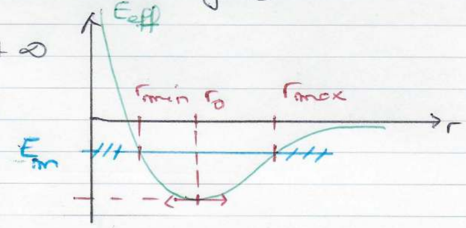
avec $\boxed{E_{eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - G\frac{M_\odot m}{r}}$

$$\frac{dE_{eff}(r)}{dr} = -m\frac{C^2}{r^3} + G\frac{M_\odot m}{r^2}$$

$$\frac{dE_{eff}(r_0)}{dr} = 0 \quad \text{avec } r_0 = \frac{C^2}{G M_\odot}$$

$\lim_{r \to 0} E_{eff}(r) = +\infty$

$\lim_{r \to +\infty} E_{eff}(r) = 0$



4) Pour $E_m = E_{eff\,min}$ $\quad r_{max} = r_{min} = r_0$

avec $\boxed{r_0 = \frac{C^2}{G M_\odot}}$ $\qquad r = $ cste : la trajectoire est circulaire

$$E_0 = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{C^4} G^2 M_\odot^2 - G^2 \frac{M_\odot^2 m}{C^2}$$

$$\boxed{E_0 = -\frac{1}{2} m \frac{G^2 M_\odot^2}{C^2}}$$

$E_c(r_0) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r_0^2} \qquad (\dot{r} = 0)$

$E_c(r_0) = \frac{1}{2} m \frac{G^2 M_\odot^2}{C^2}$ et $E_p(r_0) = -m\frac{G^2 M_\odot^2}{C^2}$

$E_c(r_0) = -2E_p(r_0) = -E_{m_0}$

5] On a pour $r = r_{min}$ et $r = r_{max}$ $E_m = E_{peff}$ car $\dot{r} = 0$

soit $E_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - G\frac{M_\odot m}{r}$

$$\frac{1}{2} m C^2 - G m M_\odot r - E_m r^2 = 0$$

$$\iff \boxed{r^2 + \frac{G m M_\odot}{E_m} r - \frac{1}{2}\frac{m C^2}{E_m} = 0}$$

$$\Delta = \frac{G^2 m^2 M_\odot^2}{E_m^2} + 2\frac{m C^2}{E_m} > 0 \;*$$

$$r_{min/max} = -\frac{G m M_\odot}{2E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{G m M_\odot}{E_m}$

et $r_{max} - r_{min} = (a + ae) - (a - ae) = 2ae$

$$2ae = \sqrt{\Delta}$$

* $\Delta > 0 \iff \frac{G^2 m^2 M_\odot^2}{E_m^2} > -2\frac{m C^2}{E_m}$

$$\iff \frac{G^2 m^2 M_\odot^2}{-E_m} > 2 m C^2$$

$$\iff E_m > \underbrace{-\frac{1}{2} m \frac{G^2 M_\odot^2}{C^2}}_{E_0} \quad \text{OK}$$

D'où $4a^2e^2 = \frac{G^2 m^2 M_\odot^2}{E_m^2} + \frac{2 m C^2}{E_m}$

$$4a^2e^2 = 4a^2 + \frac{2 m C^2}{E_m}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2 m C^2}{4a^2 E_m} < 1.$$

6]. $v_{aer} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ vitesse aréolaire

$v_{aer} = \text{cste}$. Cette propriété a été identifiée par Kepler

Pour une ellipse $S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$

avec $1 - e^2 = -\frac{2 m C^2}{4a^2 E_m}$

On a $C = 2 v_{aer} = \text{cste} = \frac{2S}{T}$

soit $\frac{4S^2}{T^2} = C^2 \iff \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} = C^2$

$$\iff + \frac{4\pi^2 a^{\cancel{4}}}{T^2}\left(-\frac{2m \cancel{C^2}}{\cancel{4a^2} E_m}\right) = \cancel{C^2}$$

avec $-E_m = \frac{G m M_\odot}{2a}$

$$\frac{2m\pi^2}{T^2} a^2 = -E_m = \frac{G m M_\odot}{2a}$$

$$\frac{4\pi^2}{G M_\odot} = \frac{T^2}{a^3} \quad 3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler.}$$

Exercice 2 Satellite solaire

Système étudié = point matériel M de masse m
Référentiel de Copernic galiléen R.

1a) $\vec{F}$ = force de gravitation exercée par le Soleil

$$\boxed{\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{M_S m}{r^2}\vec{u_r}}$$

b. O est fixe dans R. $\vec{L_O}(M)$ = moment cinétique en O de M

D'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$$

car $\vec{OM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires

$$\vec{L_O}(M) = \vec{cte}$$

c. Par définition $\vec{L_O}(M) = \vec{OM}\wedge m\vec{v}$

$\forall t$ $\vec{OM} \perp \vec{L_O}$ qui garde une direction constante.
donc $\vec{OM} \in$ plan perpendiculaire à $\vec{L_O}$ passant par O,
la trajectoire de M est plane.

d. On utilise un repère polaire $(O; \vec{u_r}; \vec{u_\theta}; \vec{k})$

$$\vec{OM} = r\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{L_O}(M) = \vec{OM}\wedge m\vec{v} = mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{k} = \vec{cte}$$

m étant constante $\boxed{r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathcal{C}}$ constante

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{C} = r^2\frac{d\theta}{dt}}$ est une constante du mouvement.

Si à t_P $\vec{v_P}\perp\vec{OP}$ alors $\mathcal{C} = (\vec{r_P}\wedge\vec{v_P})\cdot\vec{k} = r_P v_P$.

1e.) Soit E_m l'énergie mécanique du point M

Par définition $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$

avec $dE_p = -\vec{F}.\vec{dr} = +\mathcal{G}\frac{M_S m}{r^2}\vec{u_r}.\vec{dr} = +\mathcal{G}\frac{M_S m}{r^2}dr$

$$\boxed{E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{M_S m}{r}}$$ (On prend $E_p(r\to\infty) = 0$)

Théorème de l'énergie cinétique $dE_c = \vec{F}.\vec{dr} = -dE_p$

E_m = cte.

2/ La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R.

2a) $\vec{OM} = R\vec{u_r}$ $\rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$

De plus $\mathcal{C} = R^2\frac{d\theta}{dt}$ $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{R^2}$ = cte

$\|\vec{v}\| = \frac{\mathcal{C}}{R}$ est constante, le mouvement est uniforme.

2b) D'après la 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$
avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{R}\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u_r} = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{mR^2}\vec{u_r}$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} = -\frac{\mathcal{G}M_S}{R^2}\vec{u_r}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}}$$

Soit T la durée de révolution. v étant constant, on a,

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\mathcal{G}M_S/R}}$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{\mathcal{G}M_S}}}$$

2c) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad E_c = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_S m}{R}$

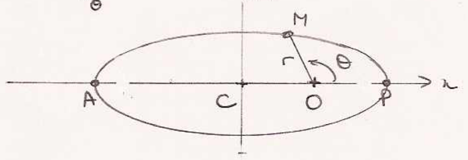
$E_p = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{R}$ $\qquad \rightarrow E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_S m}{R}$

2d) $T_0 = 365,25$ jours $\qquad T_0 = 3,156 . 10^7$ s

$R_0 = \frac{T_0 v_0}{2\pi}$ $\qquad R_0 = 1,51 . 10^{11}$ m

et $\boxed{\mathcal{G}M_S = R_0 v_0^2} = \frac{4\pi^2 R_0^3}{T_0^2} = \frac{v_0^3 T_0}{2\pi}$

3/ $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ $\qquad$ a)



3b) $a = \frac{1}{2}$ grand axe $\qquad 2a = OA + OP = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}$

$$\boxed{2a = \frac{2p}{1-e^2}}$$

3c) Pour $e = 0$ $\quad r = p = \text{cste}$ $\quad$ la trajectoire est un cercle.

3d) $E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_S m}{a}$

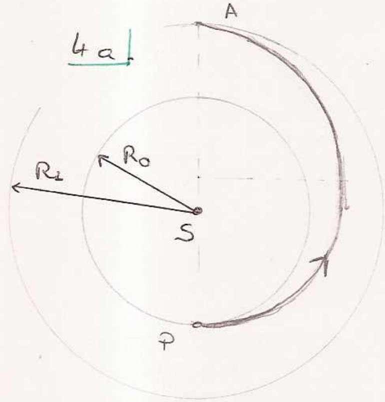
et $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mathcal{G}M_S m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_S m}{a}$

$$v^2 = 2\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_S}{a} + \frac{\mathcal{G}M_S}{r}\right]$$

$$\boxed{v^2 = \mathcal{G}M_S\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]}$$

4/ Orbite de Mars $R_1 = nR_0$

4a)



4b) Soit T_1 la durée de l'année martienne

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{R_1^3}{R_0^3}$$

$$\boxed{T_1 = T_0 . n^{3/2}}$$

$T_1 = 687,2$ jours terrestres $= 5,937 . 10^7$ s

v_1 = vitesse orbitale de Mars $\qquad \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{R_0}{R_1}$

$v_1 = v_0 . \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} = \frac{v_0}{\sqrt{n}}$ $\qquad v_1 = 24,30 . 10^3$ ms^{-1}

4c) On doit avoir

D'après 3d $\quad v_P^2 = \mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{R_0} - \frac{1}{a}\right)$

avec $a = \frac{R_1 + R_0}{2}$ $\quad$ et $\mathcal{G}M_S = R_0 v_0^2$

$$v_P^2 = R_0 v_0^2 \left(\frac{2}{R_0} - \frac{2}{R_0+R_1} \right) = v_0^2 \, \frac{2R_0 + 2R_1 - 2R_0}{R_0+R_1}$$

$$v_P^2 = v_0^2 \, \frac{2R_1}{R_0+R_1} = v_0^2 \, \frac{2}{1+1/n}$$

$$\boxed{v_P = v_0 \sqrt{\frac{2n}{n+1}}} \qquad \underline{v_P = 32,97.10^3 \ \mathrm{ms^{-1}}}$$

4 d] $$v_A^2 = R_0 v_0^2 \left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_0+R_1} \right) = \frac{v_0^2}{n} \left(\frac{2R_0}{R_0+R_1} \right) = \frac{2v_0^2}{n(1+n)}$$

$$\boxed{v_A = v_0 \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}} \qquad \underline{v_A = 21,63.10^3 \ \mathrm{ms^{-1}}}$$

$$\underline{v_P - v_A = 11,34.10^3 \ \mathrm{ms^{-1}}}$$

4 e] Soit T la durée du transfert

$$T = \frac{T_{ellipse}}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{R_0 v_0^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (1+n)^3 R_0^2}{8 \, v_0^2}}$$

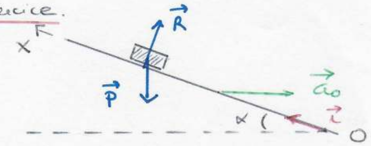
$$T = \frac{R_0}{v_0} \pi \left(\frac{1+n}{2} \right)^{3/2} \qquad T = \frac{T_0}{2} \left(\frac{1+n}{2} \right)^{3/2}$$

$T = 258,9$ jours $= \underline{0,709}$ année terrestre

G – Référentiels non galiléen

Exercice 1 Plan incliné accéléré

Exercice.



1]

- Système étudié = point matériel M
- Référentiel lié au plan incliné en mouvement de translation uniformément accéléré par rapport à R galiléen.
  Le référentiel d'étude n'est pas galiléen.
- Bilan des forces :
  $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids
  $\vec{R}$ = réaction normale au plan incliné (pas de frottement
  $\vec{f}_{ient} = -m\vec{a_0}$ force d'inertie d'entraînement
  $\vec{f}_{ie} = \vec{0}$ force d'inertie de Coriolis

D'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox :

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + ma_0\cos\alpha$$

$$\boxed{\ddot{x} = -g\sin\alpha + a_0\cos\alpha}$$

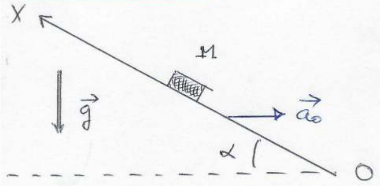
2] A $t = 0$ $\quad \dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = (-g\sin\alpha + a_0\cos\alpha)\, t + 0$$

Le point remonte la pente $\iff \dot{x} \geq 0$

si $\boxed{a_0 > g\tan\alpha}$

Seconde version :



1) Système étudié : point matériel M

Référentiel lié au plan incliné non galiléen (translation uniformément accéléré /R galiléen)

Bilan des actions :
* Poids $\vec P = m\vec g$
* Réaction du plan incliné $\vec R \perp$ au plan
* Force d'inertie d'entraînement $\vec f_{ient} = -m\vec{a_0}$
* Force d'inertie de Coriolis $\vec f_{ic} = \vec 0$ (translation).

D'après le principe fondamental de la dynamique dans R' non galiléen :

$$m\vec a = \vec P + \vec R + \vec f_{ient}$$

Selon OX : $m\ddot X = -mg\sin\alpha + 0 + ma_0\cos\alpha$

$$\ddot X = (a_0\cos\alpha - g\sin\alpha)$$

2) $\dot X = (a_0\cos\alpha - g\sin\alpha)t + cte.$

à $t=0$ $\dot X = 0 = cte$.

$$\dot X(t) = (a_0\cos\alpha - g\sin\alpha)t = \frac{dX}{dt}$$

$$X(t) = (a_0\cos\alpha - g\sin\alpha)\frac{t^2}{2} + cte.$$

à $t=0$ $X(0) = X_0 = cte$ $\quad X(t) = (a_0\cos\alpha - g\sin\alpha)\frac{t^2}{2} + X_0$

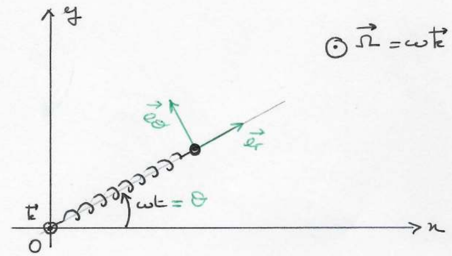
Le point remonte la pente si $a_0\cos\alpha - g\sin\alpha > 0$

$$\iff \boxed{\tan\alpha < \frac{a_0}{g}}$$

Exercice 2 Étude d'un ressort dans 2 référentiels

A. Étude d'un ressort dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire.

B. Étude dans un référentiel $\mathscr{R}'$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe



- Système : particule M
- Référentiel R' non galiléen (rotation uniforme de R galiléen)
- Forces : $\vec P$ poids
  $\vec R$ réaction du plan
  $\vec T$ tension du ressort
  $\vec f_{ient}$ force d'inertie d'entraînement
  $\vec f_{ic}$ force d'inertie de Coriolis

1) Par définition $\vec f_{ic} = -2m\vec\Omega\wedge\vec v$ avec $\vec\Omega = \omega\vec k$, $\vec{OM} = r\vec{e_r}$, $\vec v = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot r\vec{e_r}$

$$\vec f_{ic} = -2m\omega\vec k\wedge\dot r\vec{e_r} = -2m\omega\frac{dr}{dt}\vec{e_\theta}$$

$\vec f_{ient} = -m\vec a_{ent}$ mouvement d'entraînement = mouvement circulaire uniforme

$$\vec a_{ent} = -r\omega^2\vec{e_r}$$

$$\vec f_{ient} = +mr\omega^2\vec{e_r}$$

2) Soit δW_{ient} le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement

$$\delta W_{ient} = \vec f_{ient}\cdot d\vec{OM} = m\omega^2 r\,dr = d\left[m\omega^2\frac{r^2}{2}\right] = -dE_{p\,fie}$$

$E_{p\,fie} = -m\omega^2\frac{r^2}{2} + cte$ on peut prendre $E_{p\,fie} = 0$ pour $r = 0$

$$E_{p\,fie}(r) = -m\omega^2 \frac{r^2}{2}$$

3.) $\delta W_{ie} = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM} = -2m\omega \frac{dr}{dt} \vec{e_\theta} dr \, \vec{e_r} = 0$

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas.

4.) Soit E_p l'énergie potentielle totale

$E_p = E_{pT} + E_{p\,fie}$ (l'énergie potentielle de pesanteur est une constante du mouvement et $\vec{R}$ ne travaille pas)

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 - m\omega^2 \frac{r^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}k\left[(r-l_0)^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} r^2\right] \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{1}{2}k\left(r - l_0 - \frac{\omega r}{\omega_0}\right)\left(r - l_0 + \frac{\omega r}{\omega_0}\right)$$

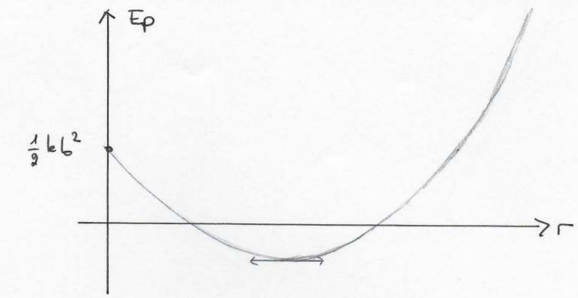
$$= \frac{1}{2}k\left[r\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right) - l_0\right]\left[r\left(1+\frac{\omega}{\omega_0}\right) - l_0\right]$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{1}{2}k\left[2(r-l_0) - 2r\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] = k\left[r\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - l_0\right]$$

$$= 0 \quad \text{pour } r = \frac{l_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{si } \omega < \omega_0$$

r	0	$\frac{l_0}{1+\frac{\omega}{\omega_0}}$	$\frac{l_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{l_0}{1-\frac{\omega}{\omega_0}}$	$+\infty$
$\frac{dE_p}{dr}$	$-$		0		$+$
$E_p(r)$	$\frac{1}{2}kl_0^2$ ↘	0 ↘	$\frac{1}{2}k\left[\frac{l_0}{1+\frac{\omega}{\omega_0}} - l_0\right]\left(\frac{l_0}{1-\frac{\omega}{\omega_0}} - l_0\right) = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{-\omega/\omega_0}{1+\frac{\omega}{\omega_0}}\right)\left(\frac{\omega/\omega_0}{1-\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$	↗ 0	↗

Si $\omega < \omega_0$



pour $\omega = \omega_0$

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(-l_0)(2r - l_0) = +\frac{kl_0}{2}(l_0 - 2r)$$

$E_p(r)$ est une droite

pour $\omega > \omega_0$ $\quad E_p(r)$ ↘ branche de parabole décroissante.

5.) Equilibre correspond à un minimum d'énergie potentielle
Seulement pour $\omega < \omega_0$
l_2 est tel que $\frac{dE_p}{dr}(l_2) = 0$

$$\text{soit } l_2 = \frac{l_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{l_0}{1-\frac{m\omega^2}{k}}$$

C'est un équilibre stable
Le mouvement est alors circulaire uniforme

6.) $l_2 = l_1$.

Exercice 3 Le satellite océanographique Jason 2

1) $\vec{F} = -\dfrac{G M_T m}{r^2}\,\vec{u}_{TS}$ avec $r = TS$

$\vec{u}_{TS} = \dfrac{\vec{TS}}{TS}$.

force de gravitation.

2) a. Rg le référentiel géocentrique est le référentiel dans lequel T le centre de la Terre est fixe et ...

Ce référentiel n'est pas rigoureusement galiléen

→ Marées océaniques non expliquées

→ Mvt de translation quasi circulaire par rapport à R héliocentrique.

b. Dans le référentiel géocentrique galiléen, le satellite S n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre = force centrale conservative.

Conséquence :

Il y a conservation du moment cinétique du satellite calculé en T : En effet, d'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_T(S)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_T(\vec{F}) = \vec{0}.$$

$$\vec{L}_T(S) = \vec{TS} \wedge m\frac{d\vec{TS}}{dt} = \vec{cte}.$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique du satellite. En effet, d'après le théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = \vec{F}\cdot d\vec{TS} = -\frac{GM_T m}{r}\,\vec{u}_{TS}\cdot d\vec{TS}.$$

avec $\vec{TS} = r\,\vec{u}_{TS}$

$d\vec{TS} = dr\,\vec{u}_{TS} + r\,d\vec{u}_{TS}$ et $d\vec{u}_{TS} \perp \vec{u}_{TS}$

Soit $dE_c = -\dfrac{GM_T m}{r^2}\,dr$.

$$d\Big(\underbrace{E_c - \frac{GM_T m}{r}}_{E_m}\Big) = 0$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r} = cte.$$

Le mouvement est plan et suit la loi des aires

3) $\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_T - G M_T m\,\vec{u}_{TS}$

a. On a $\dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{\sigma}_T + \vec{v} \wedge \underbrace{\dfrac{d\vec{\sigma}_T}{dt}}_{=\vec{0}} - GM_T m\dfrac{d\vec{u}_{TS}}{dt}$

avec $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{GM_T}{r^2}\vec{u}_{TS}$.

$\vec{\sigma}_T = r\vec{u}_{TS} \wedge m\vec{v} = m r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_z$

et $\dfrac{d\vec{u}_{TS}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\alpha$

Soit $\frac{d\vec{R}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2}\vec{u}_{TS} \wedge mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z - \mathcal{G}M_T m\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\alpha$

$$= -\mathcal{G}M_T m\frac{d\theta}{dt}(-\vec{e}_\alpha) - \mathcal{G}M_T m\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\alpha$$

$$= \vec{0}$$

Il y a conservation du vecteur de Runge Lenz au cours du mouvement.

b. $\vec{R} = \vec{v} \wedge (\vec{r} \wedge m\vec{v}) - \mathcal{G}M_T m\,\vec{u}_{TS}$.

$$= \vec{r}\cdot mv^2 - m\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{r}) - \mathcal{G}M_T m\,\vec{u}_{TS}.$$

$\vec{R}$ se trouve dans le plan de la trajectoire

c. $R = \|\vec{R}\|$ $\quad \beta = (\widehat{\vec{R};\vec{TS}})$

On a $\vec{TS} = r\vec{u}_{TS}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{TS}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_{TS} + r\frac{d\alpha}{dt}\vec{u}_\alpha$$

$$\vec{\sigma}_T = mr^2\frac{d\alpha}{dt}\vec{e}_z.$$

$$\vec{R}\cdot\vec{u}_{TS} = (\vec{v}\wedge\vec{\sigma}_T)\cdot\vec{u}_{TS} - \mathcal{G}M_T m.$$

$$= \left[\left(\dot{r}\,\vec{u}_{TS} + \frac{\sigma_T}{mr}\vec{u}_\alpha\right)\wedge\sigma_T\vec{e}_z\right]\cdot\vec{u}_{TS} - \mathcal{G}M_T m$$

$$= \left[\dot{r}\,\sigma_T(-\vec{u}_\alpha) + \frac{\sigma_T^2}{mr}\vec{u}_{TS}\right]\cdot\vec{u}_{TS} - \mathcal{G}M_T m$$

$$\vec{R}\cdot\vec{u}_{TS} = \frac{\sigma_T^2}{mr} - \mathcal{G}M_T m$$

Or $\vec{R}\cdot\vec{u}_{TS} = R\cos\beta$

On a donc $\frac{\sigma_T^2}{mr} = R\cos\beta + \mathcal{G}M_T m.$

$$r = \frac{\sigma_T^2/m}{\mathcal{G}M_T m + R\cos\beta} = \frac{p}{1+e\cos\beta}$$

avec $p = \frac{\sigma_T^2}{\mathcal{G}M_T m^2}$ et $e = \frac{R}{\mathcal{G}M_T m}$

Si $e > 1$ 1 branche d'hyperbole

$e = 1$ parabole

$e < 1$ ellipse.

4) Trajectoire circulaire

2ème loi de Newton.

$$-m\frac{v_0^2}{r_0}\vec{u}_{TS} = -\mathcal{G}M_T m\cdot\frac{1}{r_0^2}\vec{u}_{TS}.$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{6,67\,10^{-11}\times 5,97\,10^{24}}{7,714\,10^6}} = 7,18\cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

T_0 est telle que $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}} = \frac{2\pi r_0}{T_0}$

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{\mathcal{G}M_T}} \qquad T_0 = \frac{4\times 3,14^2\ 7,7^3\ 10^{18}}{6,67\,10^{-11}\times 5,97\,10^{24}}$$

$T_0 = 6,7\,10^3\,\mathrm{s}$

$= 1\,\mathrm{h}\,52$

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r_0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_T m}{r_0} - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r_0}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_T m}{r_0} \qquad E_m = -\frac{525\times 6,67\,10^{-11}\ 5,97\ 10^{24}}{7,714\,10^6}$$

$E_m = -1,36\,10^{10}\,\mathrm{J}.$

Exercice 4 Accélération radiale d'un satellite.

1) On étudie le mouvement du satellite S dans le référentiel géocentrique galiléen. Il est soumis à l'interaction gravitationnelle exercée par la terre $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{M_T\, m_S}{OS^2}\vec{e_r}$$

avec $g = \mathcal{G}\frac{M_T}{R^2}$ soit $\vec{F} = -m_S g \frac{R^2}{r_0^2}\vec{e_r}$

puisque $r_0 = OS$

(a) Le mouvement du satellite étant circulaire on a

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r_0}\vec{e_r}$$

D'après la 2ème loi de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$

D'où $-m_S\frac{v_0^2}{r_0} = -m_S g\frac{R^2}{r_0^2}$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{g\frac{R^2}{r_0}}}$$

(b) Soit T_0 la période de révolution du satellite. Le mouvement du satellite étant uniforme, on a

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} \qquad T_0 = 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{gR^2}}$$

$$\boxed{T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{g R^2}}}$$

Application numériques : $T_0 = 12$ h.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $\omega_0 = 1,5\cdot 10^{-4}$ rad·s^{-1} vitesse angulaire

$r_0 = \sqrt[3]{\frac{T_0^2 \cdot g \cdot R^2}{4\pi^2}}$ $r_0 = 27\cdot 10^3$ km

$v_0 = \sqrt{g\frac{R^2}{r_0}} = r_0\omega_0$ $v_0 = 3,9$ km·s^{-1}

$v_0 = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{T_0} 2\pi}$

2) On étudie le mouvement de M dans le référentiel du satellite S non galiléen. Le référentiel R_S est en rotation circulaire uniforme par rapport à R_g galiléen.

M est soumis à :

* l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{M_T\, m}{(r_0+x)^2}\vec{e_r}$$

* l'action de l'axe $\vec{R} \perp$ à $\vec{e_r}$ (absence de frottement)
* $\vec{f}$ force élastique dérivant de $E_p(x)$

$\vec{f} = -\vec{\mathrm{grad}}\, E_p(x)$ $\vec{f} = f(x)\vec{e_r}$

$f(x)\,dx = -dE_p$.

$f(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -m\omega_1^2 x$

* $\vec{f}_{ient}$ force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ient} = -m\vec{a}_{ent} = -m\left(-\omega_0^2 (r_0+x)\vec{e_r}\right) = m\omega_0^2 (r_0+x)\vec{e_r}$$

* $\vec{f}_{ic}$ force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\omega_0\vec{e_z}\wedge\dot{x}\vec{e_r} = -2m\omega_0\dot{x}\vec{e_y}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique on a :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{f_{ient}} + \vec{f_{ie}}$$

Selon $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -\dfrac{gR^2 m}{(r_0+x)^2} - m\omega_1^2 x + m\omega_0^2(r_0+x)$

$$\boxed{\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x + \frac{gR^2}{(r_0+x)^2} = \omega_0^2 r_0}$$

b. $x \ll r_0$ $\quad \dfrac{1}{(r_0+x)^2} = \dfrac{1}{r_0^2\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^2}$

$$= \frac{1}{r_0^2}\left[\left(1 - \frac{2x}{r_0}\right) + o\left(\frac{x}{r_0}\right)\right]$$

et $\dfrac{gR^2}{r_0^2} = \dfrac{v_0^2}{r_0} = \omega_0^2 r_0$.

Equation du mouvement approchée :

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega_0^2)x + r_0\omega_0^2\left(1 - \frac{2x}{r_0}\right) = r_0\omega_0^2$$

$$\boxed{\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = 0.}$$

c. On a $\omega_1 = 3\ 10^{-2}$ rad s^{-1} et $\omega_0 = 1{,}5\ 10^{-4}$ rad s^{-1} $\ll \omega_1$.

$\omega_1^2 - 3\omega_0^2 > 0$ $\quad$ M oscille (équation différentielle d'un oscillateur harmonique)

ω_p = pulsation des oscillations

$$\omega_p = \sqrt{\omega_1^2 - 3\omega_0^2} = \omega_1\left[1 - 3\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2}$$

avec $\dfrac{\omega_0}{\omega_1} \ll 1$. $\quad \omega_p \simeq \omega_1$ la période de révolution n'est pas affectée par la révolution du satellite

d. S'il existe une accélération radiale du satellite alors elle apparaît dans la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f_{ient}} = m\omega_0^2(r_0+x)\vec{e_x} + a_r\vec{e_x}.$$

$\Rightarrow$ modification de la position d'équilibre

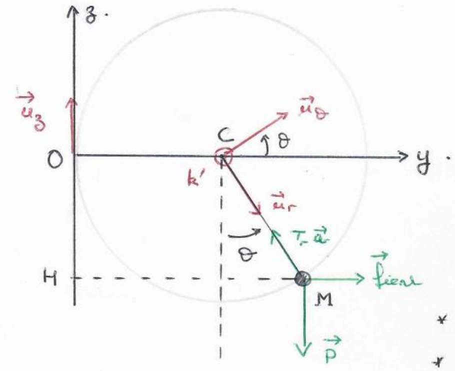
$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = -a_r$$

$$\ddot{x} + \omega_p^2 x = \omega_p^2 x_{eq} \qquad x_{eq} = \frac{-a_r}{\omega_p^2}$$

ou $a_r = -\omega_p^2 x_{eq}$.

Ce dispositif permet de mesurer l'accélération radiale du satellite.

Exercice 5 Perle sur cerceau tournant



1) Dans le référentiel R' non galiléen, M est soumis à :

* $\vec P = m\vec g = -mg\vec{u_z}$ son poids
* $\vec T$ la réaction du cercle $\vec T = T_r\vec{u_r} + T_{k'}\vec{u_{k'}}$

$T_\theta = 0$ car pas de frottement.

* $\vec{f_{ient}}$ force d'inertie d'entraînement
* $\vec{f_{ie}}$ force d'inertie de Coriolis

on a $\vec{f_{ie}} = -2m\vec\omega\wedge\vec v$ avec $\vec\omega = \omega\vec{u_z} = \omega[-\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}]$

et $\vec v = \frac{d}{dt}(R\vec{u_r}) = R\dot\theta\,\vec{u_\theta}$

soit $\boxed{\vec{f_{ie}} = +2m\omega\cos\theta\,R\dot\theta\,\vec{k'}}$

or $\vec{f_{ient}} = -m\vec{a_{ent}} = -m\vec a(P/R)$

P = point coïncident. Il a un mouvement circulaire uniforme d'axe Oz dans R.

$$\vec a(P/R) = -\omega^2\,\vec{HM} = -\omega^2 R(1+\sin\theta)\,\vec{u_y}$$

avec $\vec{u_y} = \sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}$

soit $\boxed{\vec{f_{ient}} = m\omega^2R(1+\sin\theta)(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta})}$

2) D'après le principe fondamental de la dynamique dans R'

$$m\vec a = \vec P + \vec T + \vec{f_{ient}} + \vec{f_{ie}}$$

avec $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = -R\dot\theta^2\,\vec{u_r} + R\ddot\theta\,\vec{u_\theta}$

Par projection on obtient :

$$\begin{cases} -mR\dot\theta^2 = mg\cos\theta + T_r + m\omega^2R(1+\sin\theta)\sin\theta & (1)\\ mR\ddot\theta = -mg\sin\theta + m\omega^2R(1+\sin\theta)\cos\theta & (2)\\ 0 = T_{k'} + 2m\omega R\cos\theta\,\dot\theta & (3)\end{cases}$$

3) Equation du mouvement donnée par (2)

$$\boxed{R\ddot\theta = -g\sin\theta + R\omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

4) On a $T_r = -m\left[R\dot\theta^2 + g\cos\theta + \omega^2R(1+\sin\theta)\sin\theta\right]$

$T_{k'} = -2mR\omega\cos\theta\,\dot\theta$

5) $\vec{\sigma_C}(M) = \vec{CM}\wedge m\vec v$
$= R\vec{u_r}\wedge mR\dot\theta\,\vec{u_\theta} = \underline{mR^2\dot\theta\,\vec{k'}}$

6) D'après le théorème du moment cinétique (TMC)

$$\frac{d\vec{\sigma_C}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_C}(\vec P + \vec T + \vec{f_{ient}} + \vec{f_{ie}})$$

avec $\frac{d\vec{\sigma_C}}{dt} = mR^2\ddot\theta\,\vec{k'}$

$\vec{\mathcal{M}_C}(\vec P) = \vec{CM}\wedge\vec P = R\vec{u_r}\wedge mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
$= -mgR\sin\theta\,\vec{k'}$

$\vec{\mathcal{M}_C}(\vec T) = \vec 0 - RT_{k'}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{f_{ient}}) = R\vec{u_r}\wedge m\omega^2R(1+\sin\theta)[\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}]$
$= m\omega^2R^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,\vec{k'}$

$\vec{\mathcal{M}_C}(\vec{f_{ie}}) = -2m\omega R^2\cos\theta\,\vec{u_\theta}$

7) TMC sur $\vec{k'}$: $mR^2\ddot\theta = -mgR\sin\theta + m\omega^2R^2(1+\sin\theta)\cos\theta$

8) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$

9) $\vec{P} = -mg\vec{u_3}$

$\delta w(\vec{P}) = \vec{P}.d\vec{CM} = \vec{P}.\,Rd\theta\,\vec{e_\theta} = -mgR\sin\theta\,d\theta = -dE_{pp}$

soit $dE_{pp} = mgR\sin\theta\,d\theta$

$E_{pp}(\theta) = -mgR\cos\theta + A$.

$\delta w(\vec{f_{ient}}) = \vec{f_{ient}}.d\vec{CM} = \vec{f_{ient}}.\,Rd\theta\,\vec{e_\theta} = m\omega^2R^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$

$= -dE_{pent}$

$dE_{pent} = -m\omega^2R^2(\cos\theta + \sin\theta\cos\theta)\,d\theta$

$E_{pent} = -m\omega^2R^2\left(\sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right) + cte.$

On veut $E_{pp}(0) = 0 = -mgR + A$ $\boxed{E_{pp} = mgR(1-\cos\theta)}$

$E_{pent}(0) = 0 = cte.$ $\boxed{E_{pent} = -m\omega^2R^2\sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta}{2}\right)}$

10). $\vec{T}$ et $\vec{f_{ie}}$ ne travaillent pas, $\vec{f_{ient}}$ et $\vec{P}$ dérivent d'une énergie potentielle. Il y a conservation de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp} + E_{pent} = cte.$

Soit $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) - m\omega^2R^2\sin\theta\left(1+\frac{\sin\theta}{2}\right) = cte$

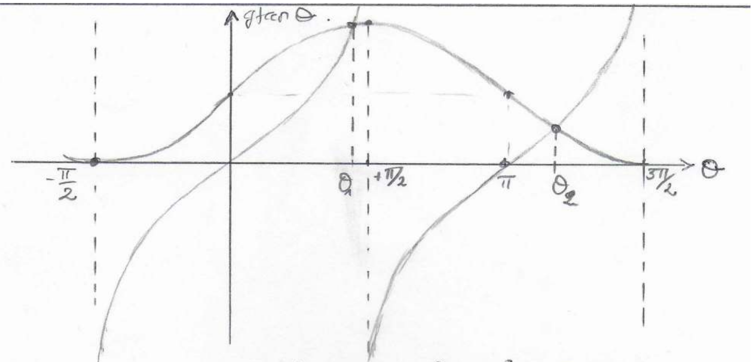
$R\ddot{\theta} + g\sin\theta - \omega^2R\cos\theta(1+\sin\theta) = 0$.

11) A l'équilibre $\Sigma\vec{f} = \vec{0}$ ou $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

$g\sin\theta = \omega^2R\cos\theta(1+\sin\theta)$

$g\tan\theta = R\omega^2(1+\sin\theta)$.

12) $\theta \in -\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}$



Cette équation admet deux solutions : $\theta_1 \in]0;\frac{\pi}{2}[$
et $\theta_2 \in]\pi;\frac{3\pi}{2}[$

13). La position d'équilibre correspond à $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$. On a
$g\tan\theta_1 = R\omega^2(1+\sin\theta_1)$.

$\frac{g}{\sqrt{3}} = R\omega^2.\frac{3}{2}$ $\omega^2 = \frac{g}{R}.\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$\omega = 1{,}96$ rads^{-1}

14) Pour savoir si cette position d'équilibre est stable, on calcule $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}$:

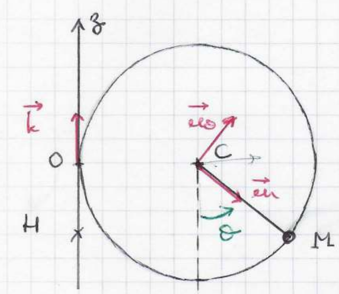
$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = +mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(-\sin\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(1 - \sin\theta - 2\sin^2\theta)$

pour $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \underbrace{mgR\frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} - m\omega^2R^2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}-2.\frac{1}{4}\right)}_{0}$

θ_1 est une position d'équilibre stable.

Deuxième version :



Système étudié : point M

Référentiel R' lié au cercle non galiléen

1) Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$
  $\vec{P} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
- $\vec{R}_N$ réaction du cercle $\perp$ à $\vec{u_\theta}$
- force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ient} = -m\vec{a}_{ent}$
  $\vec{f}_{ient} = -m\,\vec{a}(P/R)$ P = point coïncidant
  qui a un mouvement de rotation uniforme autour de (Oz) $\vec{a}(P/R) = -\omega^2\vec{HM}$
  $\|\vec{HM}\| = R(1+\sin\theta)$
  $\vec{f}_{ient} = m\omega^2 R(1+\sin\theta)(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta})$
- force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ie} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$
  avec $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega(-\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
  or $\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{u_\theta}$
  $\vec{f}_{ie} = -2m\omega(-\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta})\wedge R\dot\theta\,\vec{u_\theta}$
  $= +2m\omega R\dot\theta\cos\theta\,\vec{k}'$

2) D'après le principe fondamentale de la dynamique dans R' : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ient} + \vec{f}_{ie}$ (*)

3) On a $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot\theta^2\,\vec{u_r} + R\ddot\theta\,\vec{u_\theta}$

En projetant (*) sur $\vec{u_\theta}$ on obtient :

$$mR\ddot\theta = -mg\sin\theta + 0 + m\omega^2 R(1+\sin\theta)\cos\theta$$

Soit $R\ddot\theta = f(\theta)$

avec $f(\theta) = -g\sin\theta + R\omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta$

4) $\vec{R}_N = R_r\,\vec{u_r} + R_{k'}\,\vec{k}'$ $R_\theta = 0$ car $\vec{R}_N \perp$ cercle.

PFD sur $\vec{u_r}$: $-mR\dot\theta^2 = mg\cos\theta + R_r + m\omega^2 R(1+\sin\theta)\cdot\sin\theta$

$$R_r = -\left[mR\dot\theta^2 + mg\cos\theta + m\omega^2 R(1+\sin\theta)\sin\theta\right]$$

sur $\vec{k}'$: $0 = R_{k'} + 2m\omega R\dot\theta\cos\theta$

$$R_{k'} = -2m\omega R\dot\theta\cos\theta$$

5) Par définition $\vec{L}_C(M) = \vec{CM}\wedge m\vec{v}$

$$\vec{L}_C(M) = R\vec{u_r}\wedge mR\dot\theta\,\vec{u_\theta} = mR^2\dot\theta\,\vec{k}'$$

6) D'après le théorème du moment cinétique (C est fixe dans R')

$$\frac{d\vec{L}_C(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ient} + \vec{f}_{ie})$$
$$= \vec{CM}\wedge\vec{P} + \underbrace{\vec{CM}\wedge R_r\vec{u_r}}_{\vec{0}} + \vec{CM}\wedge(\underbrace{R_{k'}\vec{k}' + \vec{f}_{ie}}_{\vec{0}}) + \vec{CM}\wedge\vec{f}_{ient}$$

7) $mR^2\ddot\theta\,\vec{k}' = -Rmg\sin\theta\,\vec{k}' + m\omega^2R^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,\vec{k}'$

$$R\ddot\theta = -g\sin\theta + \omega^2 R(1+\sin\theta)\cos\theta$$

8) $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$

9) $dE_{p_p} = -m\vec{g}\cdot d\vec{CM} = -m\vec{g}\cdot R\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

$= +mgR\sin\theta\,d\theta$ choix : $E_{p_p}(0) = 0$.

$E_{p_p} = -mgR\cos\theta + cste = mgR(1-\cos\theta)$

$$dE_{p\,ient} = -\vec{f}_{ient} \cdot d\vec{CM} = -m\omega^2 R^2 (1+\sin\theta)\cos\theta \, d\theta$$

$$E_{p\,ient} = m\omega^2 R^2 \left[-\sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{2} \right] + cte.$$

$$E_{p\,ient}(0) = \frac{m}{2}\omega^2 R^2 + cte.$$

$$E_{p\,ient}(\theta) = m\omega^2 R^2 \left[-\sin\theta + \frac{\cos^2\theta - 1}{2} \right]$$

10] D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = \delta\omega(\vec{R}_N + \vec{P} + \vec{f}_{ient} + \vec{f}_{ie})$$

$$= -dE_{p_p} - dE_{p\,ient} + \underbrace{\delta\omega(\vec{R}_N)}_{0 \text{ car } \vec{R}_N \perp d\vec{CM}} + \underbrace{\delta\omega(\vec{f}_{ie})}_{0 \text{ car } \vec{f}_{ie} \perp \vec{v}}$$

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_{pp}}{dt} + \frac{dE_{p\,ient}}{dt} = \frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$mR^2\dot\theta\ddot\theta + mgR\sin\theta\,\dot\theta - m\omega^2R^2\cos\theta\,\dot\theta$$
$$- m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta = 0$$

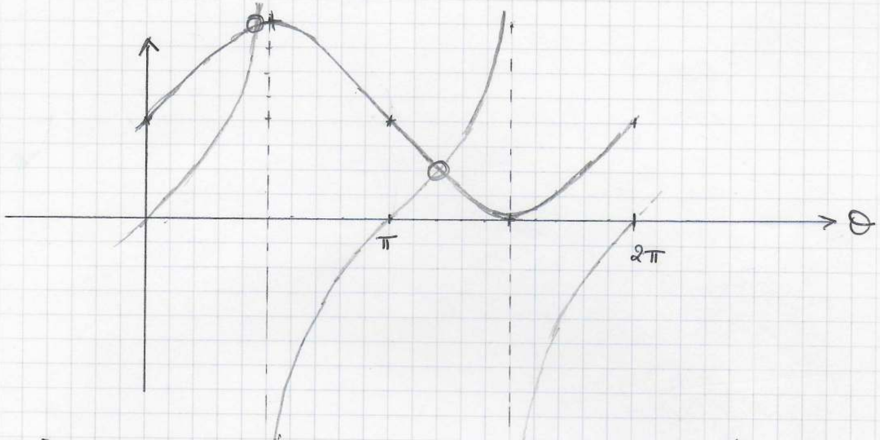
Soit $R\ddot\theta = -g\sin\theta + \omega^2 R\cos\theta(1+\sin\theta)$

11] Les positions d'équilibre correspondent aux extrema d'énergie potentielle

$$\frac{dE_{pp}}{d\theta} + \frac{dE_{p\,ient}}{d\theta} = 0 = mgR\sin\theta - m\omega^2R^2(1+\sin\theta)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad g\tan\theta = \omega^2 R(1+\sin\theta)$$

12] On trace sur un même graphe $g\tan\theta$ et $\omega^2 R(1+\sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$



Deux points d'intersection → 2 positions d'équilibre
$\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

13] On veut $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $\quad \sin\theta_1 = 1/2$

$\tan\theta_1 = 1/\sqrt{3}$

soit $g \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \omega^2 R \, \frac{3}{2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}} \qquad \omega = 1{,}96 \text{ rad.s}^{-1}.$$

14.] $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mR\left[+g\cos\theta + \omega^2R\sin\theta - \omega^2R\cos 2\theta\right]$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_1) = mR\left[+g\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{g\,1/\sqrt{3}}{3/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= +mgR\frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$ Position d'équilibre stable.