Première partie

De l'atome d'hydrogène aux galaxies

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies. Après avoir étudié l'origine physique de cette transition, nous verrons l'intérêt d'observer des galaxies dans cette fenêtre de rayonnement.

A La raie HI à 21 cm

I Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\vec{L}$.

Q1. Expression de la force électrostatique $\vec{F}$ s'exerçant sur l'électron :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

avec $\overrightarrow{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$.

Q2. F est une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle électrostatique E_P avec $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p = -\dfrac{E_p}{r}\overrightarrow{e}_r$. Soit $\dfrac{dE_p}{dr} = \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{ cste}$$

Or on veut $\lim\limits_{r\to\infty} = 0 = \text{cste}$, d'où

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Q3. Soit $\overrightarrow{L}$ le moment cinétique de l'électron calculer en O. Par définition $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge m_e\overrightarrow{v}$. D'après le théorème du moment cinétique en O fixe dans le référentiel d'étude galiléen, $\dfrac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. Il y a conservation du moment cinétique de l'électron au cours du mouvement. Or $\overrightarrow{L}$ est perpendiculaire au vecteur position $\overrightarrow{r}$. L'électron appartient au plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L}$ passant par O, le mouvement est plan.

Q4. Soit l'énergie mécanique E de l'électron. Par définition, $E = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}m_e v^2 - \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Avec $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\overrightarrow{e_r}) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Il vient $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. De plus $\overrightarrow{L} = r\overrightarrow{e_r} \wedge m_e(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = m_e r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$. On en déduit $\dot{\theta} = \dfrac{L}{m_e r^2}$.

$$E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

soit

$$E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{P\,\text{eff}}(r)$$

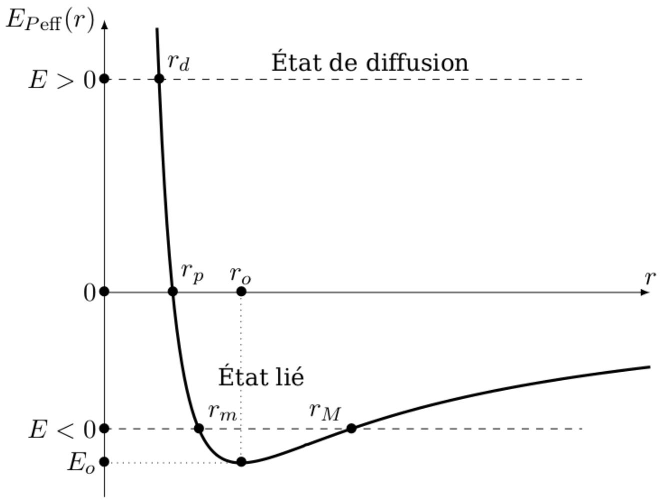
avec

$$\boxed{E_{P\,\text{eff}}(r) = \frac{\overrightarrow{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Q5. On a $\dfrac{dE_{P\,\text{eff}}}{dr}(r) = -\dfrac{L^2}{m_e r^3} + \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \dfrac{L^2 4\pi\epsilon_0 - e^2 m_e r}{m_e 4\pi\epsilon_0 r^3}$

$\dfrac{dE_{P\,\text{eff}}}{dr}(r_0) = 0 = \dfrac{L^2 4\pi\epsilon_0 - e^2 m_e r_0}{m_e 4\pi\epsilon_0 r_0^3}$ avec $r_0 = \dfrac{L^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m_e}$. Il vient $E_0 = E_{P\,\text{eff}}(r_0) = -\dfrac{m_e e^4}{2L^2(4\pi\epsilon_0)^2} < 0$.

$\lim\limits_{r\to 0} = +\infty$ et $\lim\limits_{r\to\infty} = 0$



- Pour $E > 0$, le mouvement est limité à $r > r_d$ qui peut prendre une valeur infini : il s'agit d'un mouvement révolutif (état libre ou état de diffusion) et la trajectoire est une branche d'hyperbole de foyer O ;
- Pour $E = 0$, le mouvement est limité à $r > r_p$: il s'agit d'un état limite entre les mouvements non bornés et bornés (états liés) et la trajectoire est une parabole de foyer O ;
- Pour $E_0 < E < 0$, le mouvement est limité à $r_m < r < r_M$: il s'agit d'un mouvement lié (mouvement oscillatoire entre r_m et r_M) et la trajectoire est une ellipse de foyer O.

Q6. L'orbite circulaire correspond au cas où $r = \text{cste} = \mathrm{r}_0$

$$\boxed{r_0 = \frac{L^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m_e}}$$

L'énergie mécanique E de l'électron décrivant une telle orbite vaut

$$\boxed{E_0 = E_{P\,\text{eff}}(r_0) = -\frac{m_e e^4}{2L^2(4\pi\epsilon_0)^2}}$$

Q7. Si $L = 0$, les vecteurs position et vitesse sont colinéaires à tout instant. La trajectroire de l'électron est une droite passant par le proton.

II Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle "semi-classique" de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par $L = n\dfrac{h}{2\pi} = n\hbar$ où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

Q8. Le rayon des orbites circulaires est lié au moment cinétique orbital L par a relation $r = \dfrac{L^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m_e}$, soit

$$\boxed{r_n = n^2\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$$

Les orbites sont quantifiées.

Soit a_0, le rayon de la première orbite de Bohr :

$$\boxed{a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$$

<u>AN : $a_0 = 5,30 \cdot 10^{-11}$ m</u>

Q9. Niveaux d'énergie : on a $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{2L_n^2(4\pi\epsilon_0)^2}$

$$\boxed{E_n = -\frac{m_e e^4}{8n^2h^2\epsilon_0^2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}}$$

<u>AN : $E_1 = -13,6$ eV</u>

Q10. La température de l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est comparable à son énergie d'ionisation lorque $\dfrac{3}{2}kT = -E_1$, soit

$$\boxed{T = -\frac{2E_1}{3k}}$$

<u>AN : $T = 1,05 \cdot 10^5$ K</u>

Q11. À partir de l'état fondamental, un atome d'hydrogène peut absorber un rayonnement de longueur d'onde comprise entre $\lambda_{1,\infty}$ et $\lambda_{1,2}$ telles que :

$$\frac{hc}{\lambda_{1,\infty}} = -E_1 \quad \text{et} \quad \frac{hc}{\lambda_{1,2}} = E_2 - E_1 = -E_1\left(-\frac{1}{4}+1\right) = -\frac{3}{4}E_1$$

$$\boxed{\lambda_{1,\infty} = \frac{hc}{E_1} \text{ et } \lambda_{1,2} = \frac{4hc}{3E_1}}$$

AN :$\lambda_{1,\infty} = 91,4$ nm et $\lambda_{1,2} = 122$ nm

La valeur de $\lambda_0 = 21$ cm est en dehors de ce domaine : le modèle de Bohr ne permet donc pas de comprendre l'origine de la transition.

III La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

Pour comprendre l'origine de la raie HI il faut étudier les interactions magnétiques entre le proton et l'électron. Afin d'en obtenir un ordre de grandeur, nous allons étudier ici l'interaction entre le dipôle magnétique associé au spin de l'électron et le dipôle magnétique associé au spin du proton, qui est appelée « interaction spin-spin ».

Q12. Le moment magnétique $\overrightarrow{M_o}$ de l'électron sur une orbite circulaire est par définition $\overrightarrow{M_o} = I\overrightarrow{S}$ avec I intensité du courant électrique associé au mouvement de l'électron, $I = \frac{-e}{T}$, T est la période de révolution de l'électron autour du proton, $T = \frac{2\pi r}{v}$, et $\overrightarrow{S} = \pi r^2 \overrightarrow{e_z}$. Soit $\overrightarrow{M_o} = \frac{-ev}{2\pi r}\pi r^2\overrightarrow{e_z} = -\frac{1}{2}evr\overrightarrow{e_z}$. Or $\overrightarrow{L} = m_e r v \overrightarrow{e_z}$. Il vient

$$\boxed{\overrightarrow{M_o} = -\frac{e}{2m_e}\overrightarrow{L} = \gamma_0 \overrightarrow{L}}$$

Q13. On a $\boxed{\gamma_o = -\frac{e}{2m_e}}$. C'est le rapport gyromagnétique de l'électron.

Q14. Le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le proton, sur l'électron est de la forme

$$\overrightarrow{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{M_p}\cdot\overrightarrow{e_r})\overrightarrow{e_r} - \overrightarrow{M_p}}{r^3}$$

avec $\overrightarrow{M_p} = M_p \overrightarrow{e_z}$

$$\boxed{\overrightarrow{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi a_0^3}\overrightarrow{M_p}}$$

Q15. À l'état fondamental, l'énergie potentielle magnétique d'interaction entre $\overrightarrow{M_e}$ et $\overrightarrow{B}$ est :

$$U = -\overrightarrow{M_e}\cdot\overrightarrow{B} = +g_S\frac{e}{2m_e}\overrightarrow{S_e}\cdot - \frac{\mu_0}{4\pi a_0^3}\overrightarrow{M_p}$$

Or $\overrightarrow{S_e}\cdot\overrightarrow{u_z} = \pm\frac{\hbar}{2}$, soit $U = \pm g_S\frac{e\mu_0}{8m_e\pi a_0^3}M_p\frac{\hbar}{2}$

On en déduit que l'état fondamental de l'atome d'hydrogène est formé de deux "sous-niveaux" d'énergie E_ℓ et E_u avec

$$\boxed{E_\ell = E_1 - g_S\frac{e\mu_0}{8m_e\pi a_0^3}M_p\frac{\hbar}{2} \text{ et } E_u = E_1 + g_S\frac{e\mu_0}{8m_e\pi a_0^3}M_p\frac{\hbar}{2}}$$

Q16. On a $E_u = E_l + \Delta E$ avec $\Delta E = 2g_S\frac{e\mu_0}{8m_e\pi a_0^3}M_p\frac{\hbar}{2}$. Or $\overrightarrow{M_p} = g_p\frac{e}{2m_p}\overrightarrow{S_p}$ et $\overrightarrow{S_p}\cdot\overrightarrow{e_z} = \pm\frac{\hbar}{2}$ d'où :

$$\boxed{\Delta E = g_S g_p \frac{\mu_0 e^2\hbar^2}{32\pi m_e m_p a_0^3}}$$

Q17. Pour que l'électron décrive l'orbite fondamentale de Bohr, il faut que $\overrightarrow{L} \neq \overrightarrow{0}$ (Cf. Q 6.). Sinon sa trajectoire est rectiligne.

Q18. Si $L = 0$, le mouvement de l'électron est rectiligne et dirigé vers le noyau, sa probabilité de présence au voisinage du centre sera non nulle.

Si $L \neq 0$, le mouvement de l'électron est circulaire avec quantification de l'énergie, la densité de probabilité de présence au centre de la trajectoire est nulle.

Q19. La fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins ℓ et u sont telles que

$$h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = \Delta E$$

soit

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{12\pi^2 c m_e m_p a_0^3}{\mu_0 g_S g_p e^2 \hbar}}$$

AN : $\lambda_0 = 21$ cm

Cette raie se situe dans le domaine des ondes radio !

B Étude de l'émission et de l'absorption entre les deux niveaux hyperfins

I Bilan radiatif de la raie HI

On note A_{ul}, B_{ul} et B_{lu} les coefficients d'Einstein correspondant respectivement à l'émission spontanée, à l'émission stimulée et à l'absorption entre les niveaux u et l. On donne $A_{ul} = 2,85 \cdot 10^{-15}$ s^{-1}.

Q20. Les trois processus :

- émission spontanée : transition atomique du niveau d'énergie supérieur (E_u) au niveau inférieur (E_ℓ). Cette transition s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie $h\nu = E_u - E_\ell$.
- émission stimulée : processus au cours duquel l'atome qui se trouve dans un état excité entre en interaction avec le rayonnement incident, il se désexcite en émettant un rayonnement de même direction et de même polarisation que le rayonnement incident.
- absorption : transition dû à l'absorption d'un photon par l'atome, qui passe du niveau d'énergie inférieur (E_ℓ) au niveau d'énergie supérieur (E_u).

Q21. La durée de vie τ de l'état excité d'énergie E_u est

$$\boxed{\tau = \frac{1}{A_{ul}}}$$

AN : $\tau = 3,51 \cdot 10^{14}$ s $\simeq 11$ millions d'années

Q22. Dans le milieu interstellaire ce rayonnement conduit à une raie de forte intensité car il y a une une grande quantité d'hydrogène (89% des atomes)

Q23. À 100 K l'énergie d'agitation thermique vaut $E_{th} = \frac{3}{2}kT \simeq 0,013$ eV $\ll E_2 - E_1$. Les atomes d'hydrogène se trouvent principalement dans les deux niveaux hyperfin.

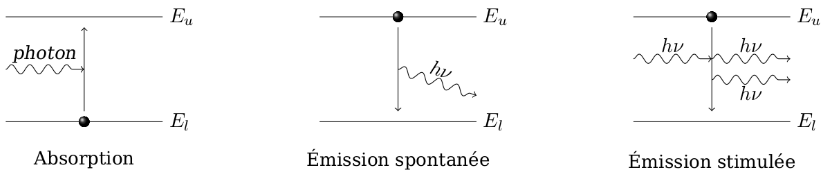
Soit n_H la densité particulaire en hydrogène, $n_H = n_u + n_\ell$ avec $\frac{n_u}{n_\ell} = \frac{g_u}{g_l}\exp\left(-\frac{E_u - E_\ell}{kT}\right)$. Il vient

$$n_H = n_\ell\left(1 + \frac{g_u}{g_l}\exp\left(-\frac{E_u - E_\ell}{kT}\right)\right)$$

Or $\exp\left(-\frac{E_u - E_\ell}{kT}\right) = \exp\left(\frac{-h\nu_0}{kT}\right)$ et $\frac{h\nu_0}{kT} \simeq 6,9 \cdot 10^{-4} \ll 1$, soit $\exp\left(\frac{-h\nu_0}{kT}\right) \simeq 1$, de plus $\frac{g_u}{g_l} = 3$. Il vient :

$$\boxed{n_H = 4n_\ell}$$

Q24. Interaction atome - rayonnement :



On a :

$$\frac{dn_\ell}{dt} = \left(\frac{dn_\ell}{dt}\right)_{\text{Absorption}} + \left(\frac{dn_\ell}{dt}\right)_{\text{Emission spont}} + \left(\frac{dn_\ell}{dt}\right)_{\text{Emission stimu}}$$

$$\frac{dn_\ell}{dt} = -n_\ell u_\nu B_{lu} + n_u \cdot A_{ul} + n_u u_\nu B_{ul}$$

Q25. Si la largeur de raie est nulle on peut écrire $\boxed{\frac{dn_\ell}{dt} = \frac{dn}{dt}}$

Q26. Sur un intervalle de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$ on a

$$\frac{dn_{\ell,\nu}}{dt} = \frac{dn_\nu}{dt} = -n_\ell u_\nu B_{lu}\Phi(\nu) + n_u A_{ul}\Phi(\nu) + n_u u_\nu B_{ul}\Phi(\nu)$$

Q27. À l'équilibre thermique, $\boxed{\frac{dn_\nu}{dt} = 0}$, soit :

$$-n_\ell u_\nu B_{lu}\Phi(\nu) + n_u A_{ul}\Phi(\nu) + n_u u_\nu B_{ul}\Phi(\nu) = 0.$$

Il vient

$$\boxed{u_\nu = \frac{n_u A_{ul}}{n_\ell B_{lu} - n_u B_{ul}}}$$

Q28. Pour ν_0 tel que $h\nu_0 = E_u - E_\ell$ on peut écrire

$$u_{\nu_0} = \frac{n_u A_{ul}}{n_\ell B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

et

$$u_{\nu_0} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\nu_0}{kT}\right)-1}$$

avec $\dfrac{n_u}{n_\ell} = \dfrac{g_u}{g_l}\exp\left(-\dfrac{E_u - E_\ell}{kT}\right)$. Il vient

$$u_{\nu_0} = \frac{\dfrac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\dfrac{n_\ell}{n_u}\dfrac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1} = \frac{\dfrac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\dfrac{g_l}{g_u}\exp\left(\dfrac{h\nu_0}{kT}\right)\dfrac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1}$$

Par identification on peut écrire

$$\boxed{g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \text{ et } B_{ul} = \frac{c^3}{8\pi h\nu_0^3}A_{ul}}$$

II Intensité spécifique de la raie HI émise par un nuage d'hydrogène atomique

Q29. Vecteur de Poynting :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}}$$

Q30. Pour une onde plane progressive monochromatique se propageant selon $\overrightarrow{u_z}$ on a :

$\overrightarrow{E}(z,t) = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - kz)$, $\overrightarrow{B}(z,t) = \overrightarrow{B_0}\cos(\omega t - kz)$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $E_0 = cB_0$

Soit u est la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde, moyennée sur une période :

$$u = \langle \frac{\epsilon_0 \overrightarrow{E}^2}{2} + \frac{\overrightarrow{B}^2}{2\mu_0}\rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{B_0^2}{4\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Le vecteur de Poynting a alors pour expression :

$$\overrightarrow{\Pi}(z,t) = \frac{\overrightarrow{E_0}\wedge\overrightarrow{B_0}}{\mu_0}\cos^2(\omega t - kz) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}$$

L'intensité I de cette onde est définie comme sa puissance, moyennée sur une période, par unité de surface perpendiculaire à sa direction de propagation :

$$I = \langle\frac{\overrightarrow{\Pi}\cdot S\overrightarrow{u_z}}{S}\rangle = \langle\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c} = c\frac{\epsilon_0 E_0}{2} = cu$$

Q31. On a $\boxed{u_\nu = n_\nu h\nu}$