Mécanique du point et du solide

I Rapports

CCINP 2023, 2024 et 2025

Le réflexe chez la plupart des candidats est de commencer par écrire systématiquement une relation fondamentale de la dynamique. L'emploi d'un théorème énergétique permet, dans certains cas, d'aboutir bien plus rapidement à un résultat qu'avec l'utilisation de la deuxième loi de Newton (cas des problèmes à un degré de liberté par exemple). Cette possibilité doit être considérée par les candidats.
Les candidats rencontrent très souvent des difficultés pour exprimer correctement les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

Mines-ponts 2025

En mécanique, l'énoncé systématique du système étudié, du référentiel choisi et des actions considérées reste un préalable non négociable. La distinction entre référentiels galiléens et non galiléens, ainsi que l'usage approprié des forces d'inertie, demeurent sources d'erreurs fréquentes.
La vitesse de libération fait l'objet d'interprétations souvent erronées.
L'usage des bases cylindrique et sphérique locales est régulièrement malmené, conduisant à des expressions incohérentes des forces de pression. L'exploitation des symétries et des propriétés des projections permettrait pourtant d'éviter ces écueils.
Il convient également de rappeler que la poussée d'Archimède représente la résultante des forces de pression et non une force additionnelle mystérieuse.

Mines-ponts 2024

Les confusions sur les notions de référentiels et de forces inertielles sont nombreuses. De plus, la représentation de ces dernières sur un schéma et une discussion qualitative dans les situations simples permettraient d'éviter des bévues sur les expressions.

Centrale-Supélec 2025

Les théorèmes de dynamique sont connus et les relations essentielles sur les changements de référentiels sont maîtrisées. On note encore quelques rares étudiants qui projettent mal les relations vectorielles tandis que la trigonométrie est parfois mal dominée (phénomène perceptible également en optique).
La notion physique des moments (de tout type) est également problématique pour certains.

Centrale-Supélec 2024

Les sujets de mécanique restent problématiques pour certains candidats le plus souvent à cause d'un manque de méthode et de rigueur (vecteur/scalaire, schémas, définitions du système et du référentiel, dérivées, intégrales, conditions aux limites, bases de projections, représentations 3D ou en coupe...). Le simple calcul d'une accélération ou d'un moment cinétique prend parfois beaucoup de temps. La notion de moment (de toute nature) demeure un concept délicat pour un certain nombre de candidats. Il faut absolument creuser ce point.

Redisons qu'il vaut mieux éviter d'appeler PFD ou RFD le théorème de la résultante cinétique TRC) pour un solide (en rotation par exemple) car cela donne lieu à des confusions irrattrapables du style « accélération du solide ». Dans la même veine : certains candidats donnent un « point d'application » au TRC...

L'obtention de la 3e loi de Képler doit être assez rapide.

Les théorèmes énergétiques posent parfois problème quant aux forces à prendre en compte.

II Questions de cours

- Notions de référentiel, galiléen, non galiléen ; illustrations.
- Théorème de Gauss gravitationnel.
- Théorème du moment cinétique. Application au pendule simple.
- États liés et de diffusion.
- Interaction gravitationnelle entre deux corps. Energie potentielle effective. Influence de l'énergie sur les trajectoires
- Lois de Kepler (démonstrations dans le cas circulaire) – Mines beos8555
- Vitesse sur orbite basse. Vitesse de libération.
- Caractère non galiléen du référentiel terrestre.
- Solide en rotation autour d'un axe fixe. Moment d'inertie, TMC et TEC.

III Exercices

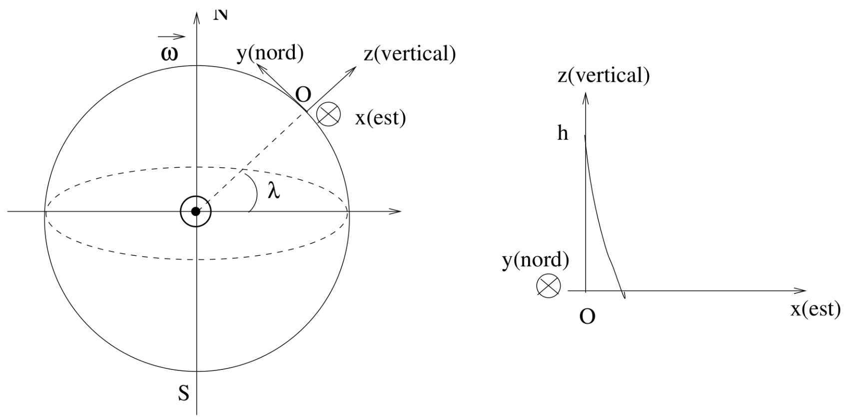
1. Pendule simple – CCINP

Une masse ponctuelle m est accrochée au bout d'un fil de longueur ℓ dont on néglige la masse. Avant l'instant t_0 le pendule est au repos, à l'instant t_0 on donne à la masse une vitesse V_0 horizontale. On note θ l'angle formé entre le fil et la verticale descendante.

1. Donner qualitativement les différents mouvements possibles pour la masse.
2. Exprimer la tension du fil à un instant t quelconque en fonction de θ.
3. Quelle vitesse initiale minimale doit-on donner à la masse pour que le fil soit toujours tendu ?

2. Déviation vers l'est – CCINP

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel de masse m d'une altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre. Les frottements seront négligés.



1. En négligeant l'aspect non galiléen du référentiel terrestre, déterminer les expressions de $x(t)$ et $z(t)$, ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour $h = 150$ m.
2. Le référentiel terrestre n'est pas réellement galiléen. Pourquoi ? Déterminer l'expression de la force de Coriolis et montrer que cette force ne peut que légèrement perturber la trajectoire. Quelle composante de la trajectoire va-t-elle être principalement modifier ?
3. Déterminer alors l'équation différentielle approchée vérifiée par $x(t)$. Intégrer cette équation et en déduire la position du point de chute.

3. Pendule conique – CCINP

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) est en rotation à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical.
On impose $\omega = \omega_0$; déterminer la valeur θ_0 correspondant à un équilibre stable. À quelle condition sur ω la solution $\theta_0 \neq 0$ existe-t-elle ?

4. Comète solaire – CCINP ou Centrale

CCINP : Une comète a un périhélie de $r_p = r_0/2$ où r_0 est la distance Terre-soleil. En P la vitesse vaut $v_P = 2v_0$ où v_0 est la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil (supposée circulaire).

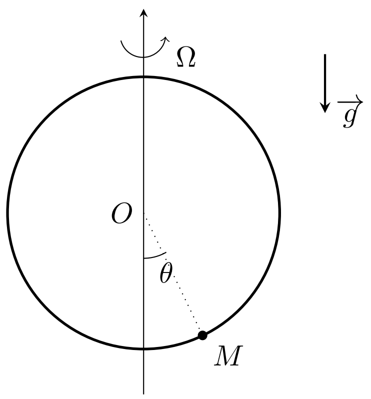
1. Quelle est la nature de la trajectoire ?
2. Déterminer $v(r)$.

Centrale : On considère une orbite terrestre de rayon R_0 ; on note M_0 la masse de la Terre et M_S celle du soleil.

1. Calculer la vitesse V_0 de la Terre, son énergie cinétique, mécanique et son moment cinétique.
2. Une comète de masse m_c coupe l'orbite terrestre en A et B ; son point le plus proche du Soleil est à $R_0/2$ et sa vitesse en ce point est $2V_0$. Donner la nature de sa trajectoire. Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.

5. Anneau sur cerceau tournant – Centrale, Navale

Un anneau de masse m glisse sans frottement sur un cercle de rayon R en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire Ω.

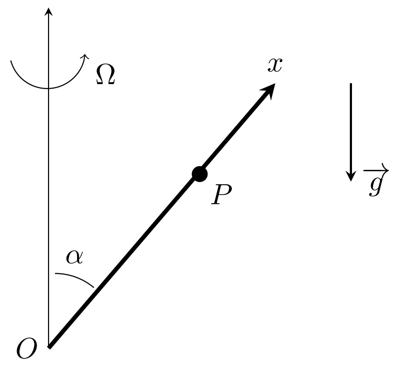


1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Discuter la stabilité et déterminer la période des petites oscillations autour des positions stables.

6. Tige tournante – CCINP, MT

Une tige faisant un angle α constant avec la verticale ascendante tourne autour de cette dernière à la vitesse angulaire constante Ω. Une perle P de masse m peut glisser sans frottement sur cette tige.

1. Trouver, dans le référentiel lié à la tige, la position d'équilibre x_{eq}.
2. On pose $x(t) = x_{eq} + X(t)$. Déterminer l'expression de $X(t)$.
3. Est-ce une position d'équilibre stable ou instable ?



7. Atome de Thomson – CCINP

On considère le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié. On se place dans le référentiel d'un noyau d'atome d'hydrogène et on considère le repère cartésien associé dont l'origine O est le noyau. On étudie l'électron représenté par un point M de coordonnées (x, y, z). Ce dernier est soumis à une force de rappel élastique $\overrightarrow{F_r} = -k\overrightarrow{OM}$ et à une force dissipative modélisée par une force de frottement fluide $\overrightarrow{F_f} = -h\vec{v}$. De plus, on tient compte d'un champ électrique extérieur d'expression : $\overrightarrow{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

1. En supposant que le mouvement de l'électron n'est que selon $\overrightarrow{e_x}$, déterminer l'équation du mouvement. Faire apparaître la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q. Calculer les valeurs de ω_0 et Q.
2. On suppose que le régime permanent est atteint. $\underline{x}(t)$ est de la forme $\underline{x}(t) = \underline{X_m}\exp(j\omega t)$. Déterminer le module et l'argument de $\underline{X_m}$.
3. Déterminer la pulsation ω qui maximise le module de $\underline{X_m}$.
4. Le spectre du visible s'étendant du bleu (400 nm) au rouge (800 nm). Comparer les pulsations associées au bleu et au rouge à ω_0. On rappelle que $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$, où λ est la longueur d'onde et c est la célérité de la lumière dans le vide.
5. En déduire une expression simplifiée du module de $\underline{X_m}$.
6. On définit la puissance rayonnée $\mathcal{P}_r = K|\ddot{x}|^2$ où K est une constante arbitraire. Calculer le rapport entre la puissance rayonnée par le bleu et celle rayonnée par le rouge.
7. Justifier pourquoi le ciel est bleu en l'absence de nuages.

Valeurs numériques :

— masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,
— charge d'un proton : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C,
— coefficient de frottement : $h = 9,1 \cdot 10^{-23}$ kg.s^{-1},
— raideur : $k = 3,6 \cdot 10^2$ kg.s^{-2}.

8. Bille dans bol – Mines

Dans tout le problème, on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe polaire Oz, dirigé suivant la verticale ascendante. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ $(g > 0)$.
On étudie le mouvement d'un solide, assimilé à un point matériel M de masse m.
Ce solide se meut sur la surface intérieure d'un paraboloïde de révolution d'axe Oz, d'équation $r^2 - az = 0$ $(a > 0)$. Le solide est soumis à la réaction du support ; on néglige tous les frottements.

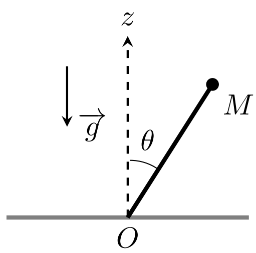
1. Montrer qu'il existe une constante C telle que $C = f(r, \dot{\theta})$.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}\dot{r}^2 G(r) + E_{p,eff}(r).$$

   Faire une étude graphique appropriée. Commenter.
3. Quelle est la période propre d'oscillation autour de l'équilibre ?

9. Couple de rappel – CCINP

Au bout d'une tige de masse nulle fixée en O, de longueur ℓ, faisant un angle θ avec la verticale, on attache une masse m. La tige subit un moment de rappel $-C\theta$.
À quelle condition la tige, écartée de sa position d'équilibre vertical, y retourne-t-elle ? Trouver alors la période des petites oscillations.

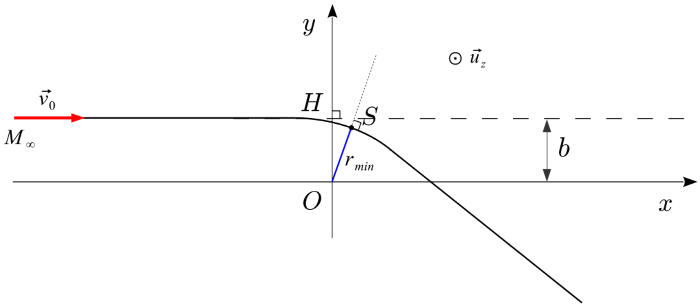


10. Satellite géostationnaire – CCINP

Définir un satellite géostationnaire et calculer son altitude en prenant $g_0 = 9,81$ m.s^{-2}, $R_T = 6400$ km et la durée d'un jour sidéral $T = 86100$ s.
Calculer l'énergie à fournir pour faire varier l'altitude de 50 km.

11. Météore – CCINP

Un météore, assimilable à un point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, arrive d'une distance $d = 100 \cdot 10^3$ km avec la vitesse $\overrightarrow{v}_0$ par rapport à la Terre (trajectoire rectiligne). Son paramètre d'impact est $OH = b$, où O correspond au centre de la Terre. On note S le point de la trajectoire le plus proche du centre de la Terre.

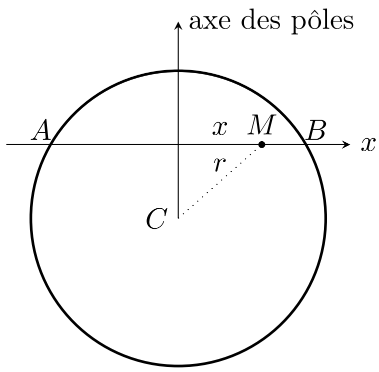


1. Quelles sont les deux grandeurs physiques conservées au cours du mouvement ?
2. Soit $\vec{\sigma}_0$ le moment cinétique par rapport à O du point M.
   (a) Donner l'expression de $\vec{\sigma}_O$ lorsque M est à l'infini ($M = M_\infty$) en fonction de m, v_0, b et $\vec{u_z}$.
   (b) On note v_S la norme de la vitesse de M lorsqu'il passe au plus près de la Terre ($M = S$). Donner l'expression de $\vec{\sigma}_O$ lorsque M est en S en fonction de m, v_S, r_{min} et $\vec{u_z}$.
3. En utilisant la conservation des grandeurs données au 1), exprimer la distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0, b, M_T, $\mathscr{G}$ constante de gravitation. À quelle condition le météore évitera-t-il l'impact avec la Terre ?
4. Dans le cas où $b > b_{min}$, déterminer l'angle de déviation φ du météorite.
5. On donne $v_0 = 11$ km.s^{-1}, $M = 5,98.10^{24}$ kg, $\mathscr{G} = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, $R = 6400$ km. Calculer b_{min}. Calculer φ pour $b = 1,5.b_{min}$.

12. Train dans un tunnel – MT

Un train peut voyager dans un tunnel creuser à travers la Terre sans frottements et sans moteur. On considère la Terre homogène de masse M_T et de rayon R_T.

Données : $R_T = 6400$ km, $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.



1. Déterminer le champ de gravitation dans tout l'espace, calculez-le à la surface de la Terre.
2. Le train peut-il aller de la ville A à la ville B ? En combien de temps ?

13. Planche lestée – CCINP

On considère deux planches identiques, de longueur L et de masse M. On ajoute sur l'une des deux planches une masse ponctuelle m au milieu de la planche. Les deux planches sont écartées d'un angle θ_0 par rapport à la verticale. On suppose que le contact des planches avec le sol reste fixe.
Quelle planche va toucher le sol en premier ?

On donne le moment d'inertie d'une planche de longueur L et de masse M par rapport à son "petit" bord : $J = \dfrac{1}{3}ML^2$.

Indication : montrer que la vitesse angulaire des planches a pour expression :

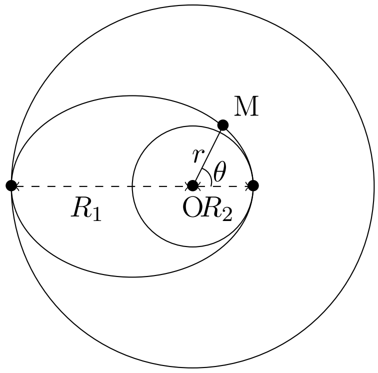
$$\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{MgL}{J}(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

Inutile mais intéressant : pour $\theta_0 = 5^o$

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = 5,1$$

14. Orbite transfert – CCINP

Un satellite de masse m est en orbite circulaire de rayon R_1 autour de la Terre à la vitesse v_1. Le satellite rejoint l'orbite circulaire de rayon R_2 par une orbite elliptique, avec la vitesse initiale v_S. Enfin le satellite passe en orbite circulaire de rayon R_2 à la vitesse v_2. On suppose que les vitesses v_2 et v_S sont égales.



1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite elliptique et l'expression de la vitesse sur une orbite circulaire.
2. Trouver le facteur k qui relie v_S et v_1. L'expression de k dépendra de R_1 et R_2.

   On introduit une force de frottement de la forme : $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$.
3. Montrer que le moment cinétique par rapport à O s'écrit : $\overrightarrow{L}_O(t) = \overrightarrow{L}_O(t=0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

   À $t = 0$, le satellite se trouve sur l'orbite basse de rayon R_2. On suppose les frottements faibles et le mouvement quasi circulaire.
4. Grâce au théorème de l'énergie mécanique montrer que $r(t) = R_2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$
5. Exprimer la vitesse $v(t)$ du satellite puis son énergie mécanique en fonction du temps.

beos 8551