Mécanique des fluides

I Rapports

CCINP 2025 et 2024

En mécanique des fluides, les bilans macroscopiques de fluides en écoulement permanent sont, comme chaque année, délicats pour les candidats. La définition précise du système fermé dans l'étude des fluides en écoulement permanent laisse toujours à désirer. Dans les bilans de quantité de mouvement, les forces pressantes sont souvent oubliées ou mal évaluées.

CCINP 2023

Les bilans macroscopiques de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour les fluides en écoulement stationnaire constituent une véritable difficulté pour nombre de candidats. Leur mise en place exige une définition précise du système fermé à partir d'un système ouvert défini par une surface de contrôle. Un effort est attendu sur ce point. Les forces pressantes sont souvent oubliées.

Dans les bilans d'énergie cinétique ou mécanique, la puissance des forces intérieures doit être évoquée.

De façon générale, en mécanique des fluides, il est important de bien analyser les hypothèses relatives à la nature des écoulements, avant d'entreprendre la simplification de l'équation de NavierStokes ou l'utilisation d'une relation de Bernoulli.

Mines-ponts 2025

En mécanique des fluides, le lien entre débit volumique et flux mériterait d'être explicité plus systématiquement.

L'usage des bases cylindrique et sphérique locales est régulièrement malmené, conduisant à des expressions incohérentes des forces de pression. L'exploitation des symétries et des propriétés des projections permettrait pourtant d'éviter ces écueils.

Il convient également de rappeler que la poussée d'Archimède représente la résultante des forces de pression et non une force additionnelle mystérieuse.

Mines-ponts 2024

La notion de débit volumique en mécanique des fluides est souvent floue. Le lien avec un calcul de flux est rarement clair.

Centrale-Supélec 2025

En mécanique des fluides, si les hypothèses de la relation de Bernoulli sont généralement bien connues, l'exploitation de la force surfacique de cisaillement, donnée en énoncé, est parfois mal comprise.

Centrale-Supélec 2024

Comme l'an passé, la mise en place d'un bilan (de matière, de quantité de mouvement ou d'énergie) est parfois compliquée : il faut impérativement revoir ce point en commençant par la définition du système ET du référentiel, ce dernier étant souvent oublié.

L'utilité du nombre de Reynolds n'est pas toujours évidente notamment dans la simplification de l'équation de Navier-Stokes.

La force surfacique de cisaillement, rappelée dans l'énoncé, est parfois mal comprise et sa manipulation est alors très délicate. Il faut reprendre ce point.

Le calcul de $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ pose des problèmes à certains candidats.

II Questions de cours

— Atmosphère isotherme. Ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère. Validité du modèle ?
— Loi fondamentale de l'hydrostatique. Application à un fluide incompressible.
— Loi locale de conservation de la masse.
— Écoulement potentiel, analogie avec l'électrostatique.
— Principe d'un bilan en mécanique des fluides (masse, quantité de mouvement, énergie).
— Équations d'Euler et de Bernoulli.
— Théorème de Bernoulli.
— Notion de viscosité.
— Démonstration du théorème de Bernoulli pour un écoulement incompressible, stationnaire, homogène, irrotationnel et parfait. Idem pour un écoulement rotationnel

III Exercices

1. Équilibre d'un fluide – CCINP

Un cylindre de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h. L'eau est en équilibre avec la pression atmosphère à la pression p_0. On met en rotation le cylindre autour de son axe jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse angulaire ω. On constate que l'eau se met à tourner et finit par être en équilibre par rapport au cylindre. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

1. Déterminer la pression en tout point de l'eau.
2. Montrer que l'équation de la surface libre est une parabole du type :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B$$

3. Déterminer l'expression de B.

2. Fluide visqueux entre deux plaques – Centrale

On a deux disques en rotation autour de l'axe Oz, de même rayon a. Le disque 1 (D_1) est à la cote $z = 0$ et le deuxième (D_2) à $z = e$ avec $a \gg e$, donc on peut négliger les effets de bords en $r = a$. Entre les deux disques il y a un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité η. D_1 tourne à la vitesse angulaire ω_1 et D_2 à la vitesse angulaire ω_2. On donne le champ des vitesses : $\overrightarrow{v}(M,t) = v(r,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

1. Justifier la forme du champ de vitesse : $\vec{v}(M,t) = r.\omega(z,t)\,\vec{e_\theta}$.
2. Si on a $v(z)$, la force exercée par une couche de fluide sur celle au-dessus est $\overrightarrow{dF} = -\eta.\dfrac{dv}{dz}dS\vec{e_\theta}$. On considère un petit volume élémentaire du fluide compris entre r et $r+dr$, θ et $\theta+d\theta$ et z et $z+dz$. Quelles sont les forces qui s'appliquent sur ce volume élémentaire ?
3. (a) Appliquer le théorème du moment cinétique au petit élément de fluide pour trouver l'équation de diffusion.
   (b) On se place en régime permanent. On a ω_1 et ω_2 qui sont constantes. Trouver l'expression de ω.
   (c) Quel est le couple que le fluide exerce sur le disque 1 ? Définir un coeffcient de frottement entre les 2 disques.
   (d) Application numérique. Calculer f. Données pour l'huile de ricin : $\rho = 0,965$ g.cm^{-3}, $\eta = 1015$ mPa.s.
   (e) Vérifier que l'on est bien en régime laminaire.
4. L'ensemble du système est initialement au repos. À t $= 0$ on a $\omega_2 = \Omega$ et $\omega_1 = 0$. Déterminer l'ordre de grandeur de la mise en place du régime permanent.

3. Modèle de cyclone – CCINP

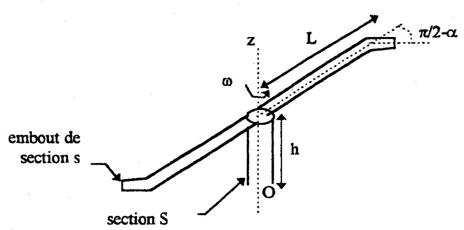
On assimile un cyclone à un cylindre infini de rayon $a = 50$ m. Le vecteur tourbillon est de la forme $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u_z}$; il est uniforme à l'intérieur du cylindre, nul à l'extérieur. On donne pour $r = a$: $\|\vec{v}\| = 180$ km/h.

1. Donner la relation entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}$. Trouver une analogie électromagnétique.
2. Tracer l'allure des lignes de courant. Exprimer $\vec{v}$ pour $v < a$ et $v > a$. Calculer numériquement Ω.
3. Loin du cyclone, $p = p_0$. Exprimer p à l'intérieur du cyclone.

4. Tourniquet hydraulique

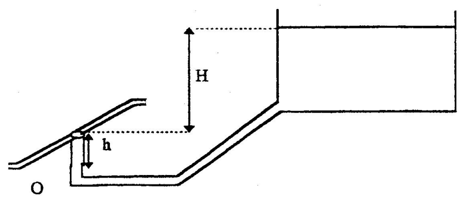
1. Question préliminaire — On considère un référentiel $\mathcal{T}$ en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical Oz. Un fluide parfait incompressible est en écoulement permanent dans ce référentiel. Déduire de l'application de la relation de la dynamique à la particule de fluide, une généralisation du théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant au cas de ce référentiel en rotation.

Un tourniquet hydraulique est constitué de deux tubes creux horizontaux de longueur L solidaires d'un axe vertical. Ils sont terminés par des embouts de section s et dont la normale fait un angle α avec la normale aux tubes. De l'eau arrive par l'axe du tube de section S et en ressort par les deux embouts.



Le tourniquet tourne à vitesse angulaire ω constante. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible et son écoulement dans le référentiel du tourniquet est supposé permanent. Elle sort sous forme d'un jet libre dans l'atmosphère à pression p_0.

2. Soit D le débit massique de l'eau. Calculer la pression au point O en fonction de $h, s, S, D, \omega, L, \rho$ et g.



3. L'ensemble est relié à un réservoir suffisamment grand pour y négliger la vitesse de l'eau et considérer que sa hauteur est constante. Donner la relation entre D, H, ω, s, L, ρ et g. Commenter le résultat.

4. On s'intéresse dans cette question à l'action de l'eau sur le tourniquet assimilée à un couple de moment Γ par rapport à l'axe Oz.

a) En prenant un volume d'eau bien choisi, calculer ce couple.
b) Calculer la puissance fournie par l'eau au tourniquet.
Application numérique : $\alpha = 0$, $H = 10$ m, $D = 3$ kg.s^{-1}, $L = 10$ cm, $g = 10$ m.s^{-2}, $s = 1$ cm^2, $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}. Calculer la puissance et le rendement du dispositif.

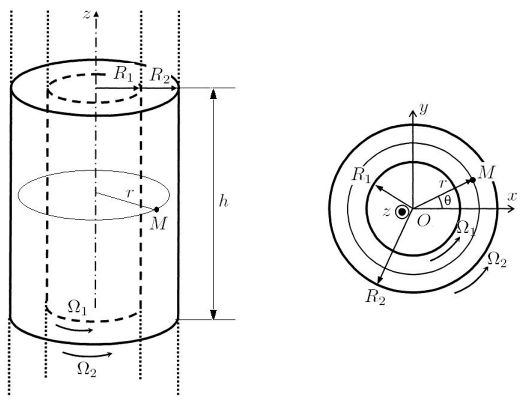
5. Citerne de pompier – CCINP

Un réservoir de pompier de longueur $L = 95$ cm selon Ox et de hauteur $H = 80$ cm selon Oz est rempli jusqu'à une hauteur $h = 65$ cm. La pression à la surface est maintenue à $P_0 = 1,0$ bar et l'eau a une masse volumique de $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} supposée constante.

1. Donner l'équivalent volumique des forces de pression. Retrouvez l'équation de la statique des fluides et en déduire $p(z)$.
2. Calculer la force de pression s'exerçant sur la face latérale. Faire l'application numérique. Commenter.
3. Le camion démarre avec une accélération $\overrightarrow{a} = a_0\overrightarrow{e_x}$. Déterminer l'équation $z(x)$ de la surface libre.
4. Le camion est arrêté, on le vide par une ouverture en $z = 0$ de diamètre $d_1 = 3,1$ cm sur laquelle on fixe la lance à incendie. Celle-ci se termine par un embout conique dont la sortie est de diamètre $d_2 = 1,9$ cm. Une pompe fournissant une puissance $P = 1,3$ kW permet d'obtenir un débit de volume $D_v = 3$ L.s^{-1} lorsque l'embout est à une altitude $Z > 0$. Calculer v_1 la vitesse du fluide à la sortie de la pompe et v_2 celle à la sortie de l'embout. Quelle est la hauteur Z atteinte par l'eau.

6. Viscosimètre de Couette

Un fluide incompressible est en mouvement permanent entre deux cylindres circulaires de rayons R_1 et R_2 qui tournent autour de leur axe commun aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 constantes. On suppose que la hauteur h des cylindres est grande devant les deux rayons, de sorte que l'écoulement pourra être supposé invariant par translation selon $\overrightarrow{e_z}$. On néglige les effets de la pesanteur.



1. Écrire la condition d'incompressibilité et les conditions aux limites imposées par les parois. En déduire que le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_\theta}$.

2. Écrire l'équation de Navier-Stokes et, grâce aux conditions aux limites imposées par les parois, déterminer le champ des vitesses et le champ des pressions.

3. Vérifier que la viscosité n'intervient pas. Peut-on en déduire que l'écoulement est inchangé si le fluide est parfait ?

4. On admet que la force surfacique de viscosité exercée par le fluide à l'intérieur du cylindre d'axe Oz et de rayon r sur le fluide à l'extérieur de ce cylindre s'exprime par

$$\overrightarrow{\varphi}_{s,visc} = -\eta r \frac{d}{dr}\left(\frac{v(r)}{r}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

Calculer le moment par rapport à l'axe Oz des efforts exercés par le cylindre extérieur sur le fluide.

5. Le cylindre intérieur est lié à un fil de torsion de constante de rappel C ; le cylindre extérieur est mis en rotation par un moteur électrique régulé à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_2} = \Omega \overrightarrow{e_z}$. On s'intéresse au régime permanent. Pour $\Omega = 5$ rad/s, $R = 5$ cm, $e = 1$ mm, $h = 10$ cm, on mesure un angle de torsion $\theta_e = 4,6^o$C pour $C = 5.10^{-3}$ N.m.rad^{-1}. En déduire la viscosité du fluide.

7. Fusée – CCINP

Une fusée est en mouvement dans un référentiel supposé galiléen. elle éjecte des gaz avec un débit massique D_m constant et une vitesse relative $\overrightarrow{u}$ constante.

La fusée et son contenu constinuent un systèle ouvert $(\mathcal{S})$. On considère le système fermé $(\mathcal{S}^*)$ constitué à l'instant t de $(\mathcal{S})$ c'est-à-dire de la fusée et son contenu. À l'instant $t + dt$, $(\mathcal{S})^*$ est constituéde la fusée et son contenu constituant le système $(\mathcal{S})$ d'une part et des gaz qui ont été éjectés pendant dt d'autre part. On note $m(t)$ la masse de la fusée et de son contenu à l'instant t. On note $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de la fusée et on suppose que le carburant y est à l'état solide.

1. Faire un schéma de la situation.
2. exprimer $m(t)$ en fonction de $m_0 = m(t = 0)$, D_m et t.
3. La fusée évolue dans l'espace vide loin de tout astre. Montrer que son mouvement est piloté par l'équation :
$$m(t)\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -D_m \overrightarrow{u}.$$
4. Cette équation est valable à chaque instant avec $\overrightarrow{u}$ de même direction et de sens opposé à $\overrightarrow{v}$ de telle sorte qu'en projetant sur la tangente à la trajectoire on peut écrire $m(t)\dfrac{dv}{dt} = -D_m u$.
Pour les missions spatiales lointaines on doit pouvoir atteindre $\Delta v = 80$ m.s^{-1} sur la durée totale de la mission. Calculer le pourcentage r que doit représenter la masse de carburant au départ si on utilise un moteur chimique à propergol pour lequel $u = 10$ m.s^{-1}.

8. Écoulements géostrophiques – Centrale

On écoulement l'écoulement d'un fluide de masse volumique μ à la surface de la Terre. On note $\mathcal{R}$ le référentiel géocentrique et $\mathcal{R}'$ le référentiel terrestre.

1. Ecrire l'équation d'Euler dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

2. On définit le nombre de Rossby, noté Ro, comme le rapport du terme convectif $\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}$ sur le terme $-2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$. On note U la vitesse moyenne du fluide, L la distance caractéristique de l'écoulement et ν la viscosité cinématique.
— Avec $U = 10$ m.s^{-1}, $L = 1000$ km et $\nu = 10^{-5}$ m^2.s^{-1}, évaluer les nombres de Rossby Ro et de Reynolds Re.
— Peut-on négliger la viscosité du fluide ?
— Proposer une simplification de l'équation d'Euler.

3. a) Montrer qu'en régime stationnaire, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,(P + \mu g z) = -2\mu\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$.
b) Que dire de la pression dynamique $\hat{P} = P + \mu g z$ sur une ligne de courant ?
c) Comparer avec le cas où le théorème de Bernoulli est applicable.

4. On utilise la base cylindrique pour repérer le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M) = u\overrightarrow{e_r} + v\overrightarrow{e_\theta}$. On étudie un tourbillon, centré en A, de latitude λ. Le tourbillon est d'axe Az.
a) Montrer que le gradient vertical de pression est uniforme et indépendant de la vitesse d'écoulement.
b) On se place dans l'hémisphère Nord. On étudie un anticyclone et une dépression. A l'aide des questions précédentes, orienter le gradient de pression radial, les lignes de courant, l'axe de rotation et indiquer par une flèche la force de Coriolis.
c) Comment ces résultats sont-ils modifiés dans l'hémisphère sud ?

9. Forme d'un filet d'eau

La viscosité dynamique de l'eau à température ambiante est $\eta \simeq 1.10^{-3}$ Pa.s. Un filet d'eau coule verticalement à l'air libre après avoir quitté un robinet de section horizontale circulaire de rayon $r_0 = 1$ cm. Le régime est permanent ; le débit volumique est $D = 2.10^{-2}$ L.s^{-1}. Le filet d'eau présente une symétrie de révolution autour de son axe vertical Oz. L'axe Oz est orienté vers le haut et l'origine des altitudes est prise dans le plan de sortie du robinet.

1. L'écoulement en sortie du robinet est-il laminaire ? Peut-on le considérer comme parfait ?

2. Justifier que la pression est la même en tout point du filet d'eau.

3. En coordonnées cylindriques, déterminer l'équation $z = f(r)$ d'une génératrice de la surface libre du filet d'eau.

4. Le filet d'eau, continu sur une certaine distance, finit par se scinder en gouttes. Expliquer ce phénomène. Comment le débit du filet influe-t-il sur le lieu où se forment les gouttes ?