

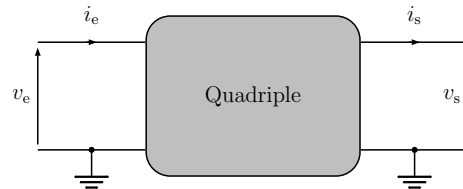
Filtre inconnu

Système linéaire d'ordre 1

I - Matériel

1 - À propos des filtres

Un filtre est un opérateur quadripolaire, réalisé par un circuit comportant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, circuit constitué de dipôles linéaires.



On étudie des filtres en sortie ouverte ($i_s = 0$).

a) Fonction de transfert

Pour une fréquence donnée f , la réponse du filtre linéaire est caractérisée par sa fonction de transfert complexe :

$$\underline{H}(jf) = \frac{s}{e} = \frac{S_m}{E_m}$$

Son module donne le **GAIN** du filtre :

$$G(f) = |\underline{H}(jf)|$$

Son argument donne le **déphasage** du signal de sortie par rapport à l'entrée :

$$\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H}(jf)) = \varphi_s - \varphi_e$$

b) Diagramme de Bode

Il résume le comportement d'un filtre par le tracé (en échelle logarithmique), de **deux courbes**,

— gain en décibels $G_{dB}(f) = 20 \log(G(f)) = g_1(f)$

— phase $\varphi_{s/e}(\omega) = g_2(f)$

c) Pulsation de coupure et bande passante

On considère que le signal est transmis correctement si l'amplitude est suffisamment grande, c'est-à-dire si $S_m(\omega) \geq \frac{S_{m,max}}{\sqrt{2}}$.

Les pulsations limites (ω_c) vérifiant l'égalité sont les **pulsations de coupure**.

L'intervalle de pulsation (ou de fréquence) telle que la condition précédente est remplie constitue la **bande-passante**. Cette grandeur est caractéristique de la qualité d'un filtre.

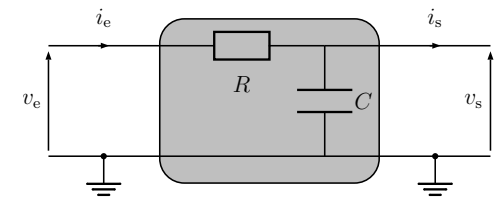
2 - Filtre passe-bas d'ordre 1 : cas du RC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

avec $\tau = RC$.

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$



Comportement fréquentiel :

TBF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$
$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = -\frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim \frac{1}{jf/f_c}$	$G \sim \frac{1}{f/f_c}$	$G_{dB} \sim +20 \log(f_c) - 20 \log(f)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

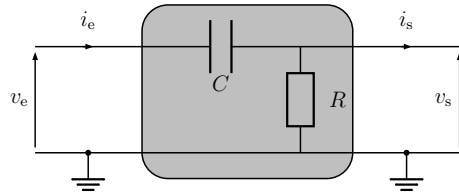
La fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Les deux asymptotes se coupent à la fréquence de coupure. Ce filtre présente une asymptote de pente -20 dB/dc aux THF.

3 - Filtre passe-haut d'ordre 1 : cas du RC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)$$



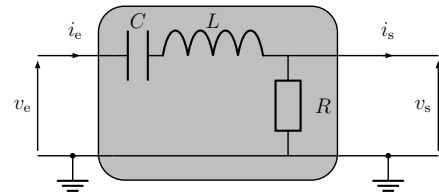
Comportement fréquentiel :

TBF	$\underline{H} \sim jf/f_c$	$G \sim f/f_c$	$G_{dB} \sim 20 \log(f) - 20 \log(f_c)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$	$\underline{H} = \frac{j}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$

La fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Ce filtre présente une asymptote de pente $+20$ dB/dc aux TBF. Les deux asymptotes se coupent à la f_c .

4 - Filtre passe-bande : cas du RLC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - j\frac{1}{RC\omega}}$$



On pose : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Forme canonique : $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \varphi(x) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

Comportement fréquentiel :

TBF	$\underline{H} \sim j\frac{x}{Q}$	$G \sim \frac{x}{Q}$	$G_{dB} \sim 20 \log\left(\frac{x}{Q}\right)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
$x_{c,1} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 - j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$
$x = 1$	$\underline{H} = 1$	$G = 1$	$G_{dB} = 0$	$\varphi = 0$
$x_{c,2} = +\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j}$	$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_{dB} = -3 \text{ dB}$	$\varphi = -\frac{\pi}{4}$
THF	$\underline{H} \sim \frac{1}{jQx}$	$G \sim \frac{1}{Qx}$	$G_{dB} \sim -20 \log(Qx)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

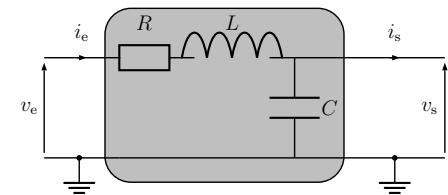
La pulsation de résonance correspond à la pulsation propre du RLC : $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Les pulsations de coupures sont données dans le tableau, elles définissent la

bande-passante du filtre : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Ce filtre présente une asymptote de pente $+20$ dB/dc aux TBF et une asymptote de pente -20 dB/dc aux THF. les deux asymptotes se coupent à la fréquence propre.

5 - Filtre passe-bas d'ordre 2 : cas du RLC

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$



On pose : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} ; x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Forme canonique : $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

$G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$ $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right)$

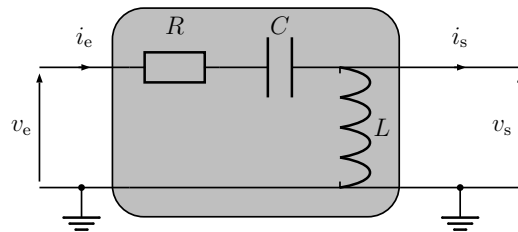
Comportement fréquentiel :

TBF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$
$x = 1$	$\underline{H} = -jQ$	$G = Q$	$G_{dB} = 20 \log(Q)$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
THF	$\underline{H} \sim -\frac{1}{x^2}$	$G \sim \frac{1}{x^2}$	$G_{dB} \sim -40 \log(x)$	$\varphi \sim -\pi$

Ce filtre présente une asymptote de pente -40 dB/dc aux THF. Les deux asymptotes se coupent à la fréquence propre.

6 - Filtre passe-haut d'ordre 2 : cas du RLC

$\underline{H}(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$



On pose : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} ; x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Forme canonique : $\underline{H}(jx) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

$G(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right)$

Comportement fréquentiel :

TBF	$\underline{H} \sim -x^2$	$G \sim x^2$	$G_{dB} \sim 40 \log(x)$	$\varphi \sim \pi$
$x = 1$	$\underline{H} = jQ$	$G = Q$	$G_{dB} = 20 \log(Q)$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
THF	$\underline{H} \sim 1$	$G \sim 1$	$G_{dB} \sim 0$	$\varphi \sim 0$

Ce filtre présente une asymptote de pente 40 dB/dc aux TBF. Les deux asymptotes se coupent à la fréquence propre.

II - Détermination rapide de la nature du filtre

Pour déterminer rapidement la nature du filtre on effectue un balayage en fréquence et on observe l'évolution de l'amplitude de signal de sortie.

Observations	A TBF	A THF	Max de S_m ?	Conclusion
S_m	$S_m = E_m$	$S_m \ll E_m$	non	Passe-bas d'ordre 1 ou 2
S_m	$S_m = E_m$	$S_m \ll E_m$	oui	Passe-bas d'ordre 2
S_m	$S_m \ll E_m$	$S_m = E_m$	non	Passe-haut d'ordre 1 ou 2
S_m	$S_m \ll E_m$	$S_m = E_m$	oui	Passe-haut ordre 2
S_m	$S_m \ll E_m$	$S_m \ll E_m$	oui	Passe-bande ordre 2

Remarque : le déphase à THF ou TBH permet de trancher entre les ordre 1 ou 2.

Pour la mesure des fréquences de coupure on prend :

Passe-bas : $G(f_c) = \frac{G(0)}{\sqrt{2}}$

Passe-haut $G(f_c) = \frac{\lim_{f \rightarrow \infty} G(f)}{\sqrt{2}}$

Résultats expérimentaux :

Boitier	1 ou 2	3 ou 4	5 ou 6	7 ou 8	9 ou 10
Type	Passe bas 1	Passe haut 1	Passe bas 2	Passe haut 2	Passe bande
Fréq. (Hz)	165 171	500 472	$2,46 \cdot 10^3$ $2,41 \cdot 10^3$	980	$1,7 \cdot 10^3$

III - Étude indicielle (régime transitoire)

Pour les filtres d'ordre 1, la durée du régime transitoire correspond avec quelques τ , avec $\tau = RC$. Pour les filtres d'ordre 2 on peut considérer que le régime transitoire dure quelques $\frac{2Q}{\omega_0}$. On peut prendre $\frac{1}{f_0}$ ou $\frac{1}{f_c}$.

La fréquence f du signal carré délivré par le GBF pour pouvoir observer la totalité du régime transitoire sur une demi-alternance du créneau est telle que $\frac{T}{2} \simeq 5\tau$ soit $f \simeq \frac{1}{10\tau}$.

IV - Étude fréquentielle

1 - Filtre passe-bas ordre 1

Fréq (Hz)	10	20	50	100	130	150	160	200	500
E_{cc} (V)	10,3	10,3	10,2	10,2	10,3	10,2	10,2 10,3	10,2	10,2
S_{cc} (V)	10,1	10,0	9,52	8,40	7,76	7,28	7,12	6,28	3,12
$\varphi_{s/e}$	-4	-8	-18	-32	-39	-44	-46	-51	-73
G_{dB} (dB)	-0,24	-0,59	-1,65	-2,43	-3,26	-4,34	-10,60	-16,39	-22,21
Fréq (Hz)	1000	2000	5000	10000					
E_{cc} (V)	10,2	10,3	10,3	10,2					
S_{cc} (V)	1,66	0,9	0,4	0,2					
$\varphi_{s/e}$	-78	-85	-86						
G_{dB} (dB)	-0,24	-0,59	-1,65	-2,43	-3,26	-4,34	-10,60	-16,39	-22,21