

1. Falaise de potentiel
2. Puits infini de potentiel
3. Potentiel inconnu
4. Interférences avec des atomes de néon - Longueur d'onde de de Broglie effective

1. Le théorème de l'énergie cinétique donne la vitesse à l'abscisse  $z$  :  $v = \sqrt{2gz}$  ; on en déduit

$$\lambda(z) = \frac{h}{m\sqrt{2gz}}$$

2. La distance parcourue entre  $z$  et  $z + dz$  est respectivement  $dl_1 = \frac{S_1 M}{D} dz$  et  $dl_2 = \frac{S_2 M}{D} dz$  ; on en déduit

$$d\phi_2 - d\phi_1 = \frac{2\pi}{D\lambda(z)} (S_2 M - S_1 M) dz$$

3. La différence de phase en  $M$  s'en déduit par intégration :

$$\begin{aligned} \phi_2 - \phi_1 &= \int_0^D \frac{2\pi}{D\lambda(z)} (S_2 M - S_1 M) dz \\ &= \frac{2\pi m \sqrt{2g}}{Dh} (S_2 M - S_1 M) \int_0^D z^{1/2} dz \\ &= \frac{2\pi m \sqrt{2g}}{Dh} (S_2 M - S_1 M) \frac{2}{3} [z^{3/2}]_0^D \\ &= \frac{2}{3} \frac{2\pi m \sqrt{2gD}}{h} (S_2 M - S_1 M) \\ &= \frac{2}{3} \frac{2\pi}{\lambda_D} (S_2 M - S_1 M) \end{aligned}$$

En identifiant ce résultat à

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{eff}}} (S_2 M - S_1 M)$$

on obtient

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{3}{2} \lambda_D$$

On commettrait une erreur de 50% en confondant  $\lambda$  et  $\lambda_D$ .

5. Équation de Shrödinger – Centrale
6. Effet Bragg dans un potentiel périodique

1. Dans l'intervalle  $]0, a_1[$ , l'équation de Schrödinger pour la partie spatiale s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) = E\varphi(x) \text{ soit } \varphi''(x) + k_1^2 \varphi(x) = 0$$

On en déduit la forme de la solution générale :

$$\begin{cases} \varphi(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \\ \varphi'(x) = ik_1 (Ae^{ik_1 x} - Be^{-ik_1 x}) \end{cases}$$

En particulier, pour  $x = 0$  :

$$\begin{cases} \varphi(0) = A + B \\ \varphi'(0) = ik_1 (A - B) \end{cases}$$

et, pour  $x = a_1$ , en remarquant que  $e^{ik_1 a_1} = i$  et  $e^{-ik_1 a_1} = \frac{1}{i} = -i$  :

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = Ae^{ik_1 a_1} + Be^{-ik_1 a_1} = i(A - B) \\ \varphi'(a_1) = ik_1 (Ae^{ik_1 a_1} - Be^{-ik_1 a_1}) = -ik_1 (A + B) \end{cases}$$

On en déduit que, conformément à l'énoncé :

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = \frac{\varphi'(0)}{k_1} \\ \varphi'(a_1) = -k_1 \varphi(0) \end{cases}$$

2. Dans l'intervalle  $]a_1, a_2[$ , l'équation de Schrödinger pour la partie spatiale s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) = (E + V_0)\varphi(x) \text{ soit } \varphi''(x) + k_2^2 \varphi(x) = 0$$

On en déduit la forme de la solution générale :

$$\begin{cases} \varphi(x) = Ce^{ik_2(x-a_1)} + Be^{-ik_2(x-a_1)} \\ \varphi'(x) = ik_2(Ce^{ik_2(x-a_1)} - Ce^{-ik_2(x-a_1)}) \end{cases}$$

En particulier, pour  $x = a_1$  :

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = C + D \\ \varphi'(a_1) = ik_2(C - D) \end{cases}$$

et, pour  $x = a_1 + a_2$ , en remarquant que  $e^{ik_2a_2} = i$  et  $e^{-ik_2a_2} = \frac{1}{i} = -i$  :

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = Ce^{ik_2a_2} + De^{-ik_2a_2} = i(C - D) \\ \varphi'(a_1 + a_2) = ik_2(Ce^{ik_2a_2} - De^{-ik_2a_2}) = -ik_2(C + D) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = \frac{\varphi'(a_1)}{k_2} \\ \varphi'(a_1 + a_2) = -k_2\varphi(a_1) \end{cases}$$

3. Compte tenu des deux questions précédentes, on obtient

$$\begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = -\frac{k_1}{k_2}\varphi(0) \\ \varphi'(a_1 + a_2) = -\frac{k_2}{k_1}\varphi'(0) \end{cases}$$

4. La question précédente donne l'effet d'une période ; pour  $N$  périodes, on obtient

$$\begin{cases} \varphi(L) = \left(-\frac{k_1}{k_2}\right)^N \varphi(0) \\ \varphi'(L) = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)^N \varphi'(0) \end{cases}$$

5. La fonction d'onde et sa dérivée ont pour valeurs en  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$\begin{cases} \varphi(0) = (1+r)A \\ \varphi'(0) = ik_1(1-r)A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(L) = tAe^{ik_2L} \\ \varphi'(L) = ik_2tAe^{ik_2L} \end{cases}$$

On en déduit le système suivant, en posant  $\eta = \frac{k_1}{k_2}$  :

$$\begin{cases} te^{ik_2L} = (-\eta)^N(1+r) \\ k_2te^{ik_2L} = k_1\frac{1}{(-\eta)^N}(1-r) \end{cases}$$

soit, en éliminant  $t$  :

$$(-\eta)^N(1+r) = \frac{\eta}{(-\eta)^N}(1-r)$$

et, en ordonnant :

$$r(\eta^{2N-1} + 1) = 1 - \eta^{2N-1}$$

Finalement, on obtient

$$r = \frac{1 - \eta^{2N-1}}{1 + \eta^{2N-1}}$$

Le coefficient de réflexion en courant de probabilité est

$$R = r^2 = \left(\frac{1 - \eta^{2N-1}}{1 + \eta^{2N-1}}\right)^2$$

Quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $\eta^{2N-1} \rightarrow 0$  ; les coefficients  $r$  et  $R$  tendent vers 1. Le système est parfaitement réfléchissant.

Ce comportement est complètement différent de celui qu'on prévoit la mécanique classique ; en effet, en description classique, la particule est accélérée dans les zones  $V(x) = -V_0$  ; sa vitesse reste toujours dirigée selon les  $x$  croissants.

## 7. Détermination d'un potentiel – Mines