

Données

Dans tous les problèmes suivants, l'entropie du gaz parfait a pour expression :

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + C_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

avec C_V capacité thermique à volume constant du gaz parfait

ou

$$S(T, P) = S(T_0, P_0) + C_P \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

avec C_P capacité thermique à pression constante du gaz parfait

Et l'entropie d'une phase condensée :

$$S(T) = S(T_0) + C \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)$$

Première partie

Une machine thermique

On réalise avec l'air, gaz diatomique considéré comme parfait, un cycle de machine thermique, ensemble de transformations réversibles suivantes :

- de l'état initial A à l'état final B : transformation à volume constant au cours de laquelle le gaz reçoit un transfert thermique $Q_1 = 3,5 \text{ kJ}$;
- de l'état initial B à l'état final C : détente adiabatique ;
- de l'état initial C à l'état final A : transformation à pression constante.

On donne les coordonnées thermodynamiques de l'état A :

pression	$P_A = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
température	$T_A = 300 \text{ K}$
volume	$V_A = 2,0 \text{ L}$

Pour ce gaz diatomique parfait, et sur l'ensemble des températures atteintes dans le cycle, on peut admettre la constante égalité de la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} , à la valeur suivante : $C_{vm} = \frac{5}{2}R$ avec $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1. Quelques propriétés du gaz parfait

- (a) Rappeler l'équation d'état du gaz parfait.
- (b) Rappeler et démontrer la relation de Mayer.
- (c) Exprimer $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ en fonction de C_{vm} et R . Faire l'application numérique.
- (d) n moles de gaz parfait évoluent d'un état initial caractérisé par P_0, V_0 jusqu'à un état final caractérisé par P_1, V_1 . Montrer que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire :

$$\Delta U = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}.$$

2. Calculer les coordonnées thermodynamiques, pression, volume et température des états B et C .
3. Tracer le cycle étudié dans le plan de coordonnées : pression en fonction du volume.
4. Calculer le transfert thermique Q_2 reçu par l'air au cours de la transformation $C \rightarrow A$.
5. Calculer le travail W reçu par l'air au cours d'un cycle et préciser la caractère moteur ou récepteur de ce cycle.
6. Exprimer et calculer le rendement de cette machine thermique.
7. On envisage un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes T_A et T_B . Comparer son rendement à celui du cycle réversible précédent.
8. L'entropie de la masse d'air dans le cycle étudié étant prise égale à 0 dans l'état A , donner l'expression analytique de l'entropie S de tout état atteint au cours de ce cycle réversible en fonction de sa température. Calculer S dans les états B et C .

Deuxième partie

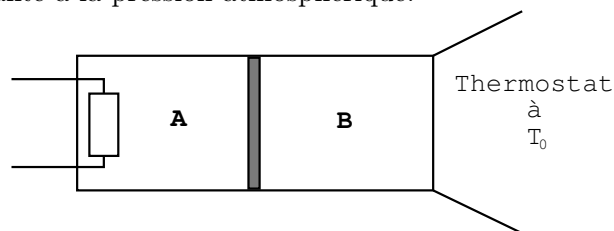
Transformations de gaz parfaits

Première partie

Un cylindre horizontal est divisé en 2 compartiments A et B de même volume V_0 par un piston couissant librement sans frottement. A et B contiennent chacun une mole de gaz parfait monoatomique à la pression P_0 et à la température $T_0 = 273\text{ K}$ (température de la glace fondante à la pression atmosphérique).

Le piston, la surface latérale du cylindre et la surface de base S_A du compartiment A sont adiabatiques. La surface de base S_B du compartiment B est diatherme.

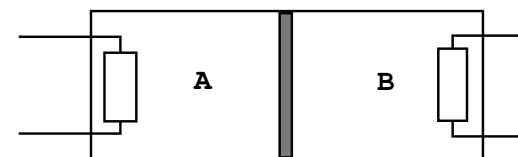
Le compartiment A est porté très lentement à la température T_1 à l'aide d'une résistance chauffante, le compartiment B reste à T_0 par contact thermique avec la glace fondante à la pression atmosphérique.



1. Exprimer les volumes V_A , V_B et la pression d'équilibre P_f en fonction de T_1 , T_0 , V_0 correspondant à la position d'équilibre du piston.
2. (a) Quelle est la variation d'énergie interne du gaz à l'intérieur de A et de B ? En déduire la variation d'énergie interne du système ($A+B$).
(b) Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz en B ? Quel est le travail reçu par B ? En déduire la chaleur Q_1 reçue par le thermostat.
(c) En considérant le système A , trouver la chaleur Q_2 fournie par la résistante chauffante.
3. Quelle est la variation d'entropie du gaz du compartiment A et du gaz du compartiment B ?

Deuxième partie

On suppose maintenant que la surface de base S_B du compartiment B est adiabatique et qu'une résistance chauffante placée en B apporte une chaleur Q_3 de façon que le piston reprenne très lentement sa position d'équilibre initial.



1. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz du compartiment A ?
Quelle est la pression finale d'équilibre P_f' ? L'exprimer en fonction de P_0 , γ , T_1 , T_0 .
2. Trouver les températures T_A' et T_B' des compartiments en fonction de γ , T_1 et T_0 .
3. Quelles sont les variations d'énergie interne dans A et B pour l'ensemble ($A+B$) en fonction de R , γ , T_1 et T_0 ?
4. Quelle est la chaleur Q_3 fournie par la deuxième résistance chauffante en fonction de R , γ , T_1 et T_0 ?
5. Quelles sont les variations d'entropie du gaz contenu dans les compartiments A et B en fonction de R , γ , T_1 et T_0 ?

Troisième partie

Pompe à chaleur géothermique

On s'intéresse au fonctionnement d'une pompe à chaleur (PAC) géothermique. Après quelques rappels et généralités, nous aborderons l'étude détaillée d'une PAC géothermique.

Le fluide caloporteur utilisé dans la PAC est le 1,1,1,2-tétrafluoroéthane, de nom commerciale R-134a. Il sera désigné plus simplement "fluide" dans la suite. Lorsqu'il est à l'état gazeux, le fluide est supposé suivre la loi des gaz parfaits. On donne la valeur numérique de la constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Lorsqu'il est à l'état liquide, le fluide est supposé être indilatable et incompressible.

On note :

- $M = 102,2 \text{ g.mol}^{-1}$ la masse molaire du fluide ;
- c_V la capacité thermique massique à volume constant du fluide à l'état gazeux ;
- c_P la capacité thermique massique à pression constante du fluide à l'état gazeux ;
- $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,18$ le rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constant ;
- $\ell_V(T)$ l'enthalpie massique de vaporisation du fluide à la température T ;
- $h_V(T)$ l'enthalpie massique de la vapeur saturante à la température T ;
- $h_L(T)$ l'enthalpie massique du liquide saturant à la température T ;
- la température du point critique du fluide vaut : $T_{crit} = 373 \text{ K}$.

Les données utiles numériques sont rassemblées dans la tableau ci-dessous :

$T(\text{K})$	$p_{sat}(\text{bar})$	$h_V(T) (\text{kJ.kg}^{-1})$	$h_L(T) (\text{kJ.kg}^{-1})$
323	13,2	421,9	270,5
288	4,88	405,6	220,1

Tableau 1 Données thermodynamiques relatives au fluide étudié.

p_{sat} est la pression de vapeur saturante du fluide à la température donnée.

Rappels et généralités

1. Dessiner l'allure du diagramme de Clapeyron d'un fluide. On rappelle que le diagramme de Clapeyron porte en abscisse le volume massique v et en ordonnée la pression p pour les différents états de la matière d'un corps. On se restreindra ici aux états liquide et gaz. Placer les domaines : liquide, gaz, mélange liquide-gaz. Définir et placer sur ce diagramme : la courbe de rosée, la courbe d'ébullition, le point critique. Dessiner l'allure de trois isothermes de températures T_a , T_{crit} , T_b avec : $T_a < T_{crit} < T_b$, où on rappelle que T_{crit} désigne la température du fluide à l'état critique.
 2. (a) Rappeler la relation entre $\ell_V(T)$, $h_V(T)$ et $h_L(T)$.
(b) Rappeler la relation entre c_P , R , M et γ .
(c) Rappeler l'expression de l'enthalpie massique d'un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique à la température T en fonction de M , γ , R , T et une constante.
 3. On considère une PAC fonctionnant entre deux thermostats idéaux, c'est-à-dire dont la température demeure constante au cours du fonctionnement de la PAC. Soient T_c et $T_f < T_c$, les valeurs de température de chacun de ces thermostats. On note w , q_c et q_f les transferts d'énergie par unité de masse algébriquement échangés par le fluide au cours d'un cycle respectivement sous forme de :
 - travail ;
 - transfert thermique avec le thermostat à la température T_c ;
 - transfert thermique avec le thermostat à la température T_f .
- (a) Rappeler le signe de w , q_c et q_f . Rappeler la définition de l'efficacité de la PAC, notée e , en fonction de w et q_c . Quel est le domaine de définition de e ?

- (b) Montrer que la valeur de e est majorée par $e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f}$, appelée efficacité de Carnot de la PAC.
 Dans quel cas a-t-on $e = e_C$?

Étude d'une PAC

On considère une PAC destinée à chauffer l'intérieur d'une maison en hiver. Le fluide de la PAC subit le cycle thermodynamique suivant :

- Étape (1) $\rightarrow$ (2) : à partir d'un état de vapeur saturante (1) à la température $T_f = 288$ K et la pression p_f , le fluide subit une compression adiabatique supposée réversible qui l'amène à un état (2), vapeur sèche à la pression p_c et à la température T_2 .
- Étape (2) $\rightarrow$ (3) : le fluide est mis en contact avec un premier thermostat à la température $T_c = 323$ K, ce qui a pour effet de le refroidir de façon isobare à l'état de vapeur saturante à la température T_c puis de le liquéfier entièrement. On note (3) l'état final de cette transformation, où le fluide est à l'état de liquide saturant.
- Étape (3) $\rightarrow$ (4) : le fluide passe dans un robinet à laminage, ce qui lui fait subir une détente isenthalpique. À l'état final, noté (4), le fluide diphasé est à la pression p_f et possède un titre massique en vapeur noté x_4 .
- Étape (4) $\rightarrow$ (1) : le fluide dans l'état (4) est mis en contact avec le second thermostat à la température T_f , ce qui a pour effet de le ramener à l'état (1).

Pour une PAC traditionnelle, dite air-air, le rôle du thermostat à la température T_f est joué par l'air à l'extérieur de la maison.

Dans une PAC géothermique, ce même thermostat est constitué par un fluide frigorigène, en général de l'eau glycolée, c'est-à-dire un mélange d'eau et d'éthane-1,2-diol. L'eau glycolée est en contact thermique *via* un échangeur thermique avec l'eau d'une nappe souterraine : on parle de PAC sur aquifère.

4. Allure du cycle

- (a) Dessiner le cycle thermodynamique décrit par le fluide de la PAC

dans le diagramme de Clapeyron. On fera figurer les isothermes T_c et T_f , ainsi que les points représentatifs des états (1), (2), (3) et (4).

- (b) Préciser lors de quelle(s) étape(s) le transfert thermique q_c est réalisé. Même question pour q_f .
 (c) Préciser, lors de l'étape (2) $\rightarrow$ (3), ce qui concrètement joue le rôle du thermostat.

5. Intérêt d'une PAC sur aquifère.

- (a) Par quoi est représenté le travail w sur le diagramme de Clapeyron ?
 (b) Montrer qu'en augmentant T_f , T_c étant fixé par ailleurs, on augmente l'efficacité de la PAC. On demande de raisonner de façon qualitative sur l'efficacité de la PAC, donc sur les échanges d'énergie et non sur l'efficacité de Carnot de la PAC.
 (c) Justifier l'avantage d'une PAC sur aquifère par rapport à une PAC air-air.

6. Détermination de q_c .

- (a) Déterminer la température au point (2), T_2 , en fonction de T_f , γ , p_f et p_c . Calculer numériquement T_2 .
 (b) Déterminer q_c en fonction de R , γ , M , de la différence de température $T_c - T_2$ et de $\ell_v(T_c)$. Calculer numériquement q_c .
 (c) Comparer numériquement les deux termes intervenant dans l'expression de q_c . Commenter.

7. Détermination du titre en vapeur à l'état (4) : à l'aide des données du tableau 1, déterminer littéralement puis numériquement le titre en vapeur à l'état (4), noté x_4 .

8. Déterminer q_f en fonction de x_4 et $\ell_v(T_f)$; Calculer numériquement q_f .

9. Exprimer littéralement puis calculer numériquement w .

10. Efficacité de la PAC.

- (a) Exprimer littéralement puis calculer numériquement l'efficacité e de la PAC.

- (b) Exprimer littéralement puis calculer numériquement l'efficacité de Carnot, e_C .

A-t-on $e = e_C$?

Expliquer lors de quelle(s) étape(s) il y a irréversibilité, ainsi que l'origine physique précise de celle-ci.