

Systèmes ouverts en régime stationnaire

En PCSI : machines thermiques dithermes. Dans un réfrigérateur, un fluide circule en circuit fermé, mais il traverse des éléments distincts ouverts (compresseur, condenseur, détendeur, évaporateur) où ont lieu des transformations.

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=5ZzGYvcXwgQ>

I Rappel : écriture des principes sous forme infinitésimale

I.1 Principes

a Le premier principe

À tout système thermodynamique, on peut associer une fonction d'état extensive, notée U appelée **énergie interne**.

Lors d'une transformation infinitésimale du système **fermé** entre deux états d'équilibre,

$$dU + dE_c = \delta W + \delta Q$$

où U est l'énergie interne du système, E_c l'énergie cinétique macroscopique du système, δW est le travail élémentaire **reçu** par le système et δQ est le transfert thermique élémentaire **reçu** par le système.

b Le second principe

Pour tout système thermodynamique, il existe une fonction d'état extensive appelée **entropie** et notée S telle que au cours d'une transformation infinitésimale d'un système **fermé** entre deux états d'équilibre,

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{créée}}$$

avec $\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_s}$ terme d'échange et $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$ terme de création.

δQ est le transfert thermique **reçu** lors de la transformation, et T_s la température du thermostat permettant ce transfert thermique.

I.2 Différentielle

a Différentielle d'une fonction réelle d'une variable réelle

f étant une fonction réelle d'une variable réelle $x \rightarrow f(x)$, on appelle *différentielle* de f , notée df , l'application linéaire $dx \rightarrow df$ qui réalise la meilleure approximation de l'accroissement $f(x + dx) - f(x)$.

Dans le cas d'une variable unique, une application linéaire est une multiplication par une constante A , soit

$$df = A dx$$

En effectuant le développement à l'ordre 1 de f au voisinage de x , on peut écrire

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx + o(dx) \text{ donc } A = f'(x)$$

On en déduit que

$$df = f'(x)dx$$

Ceci justifie la notation différentielle de la dérivée :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Règles de calcul élémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(f + g) = df + dg \\ d(fg) = gdf + fdg \end{array} \right.$$

Le théorème de dérivation composée $(f \circ u)'(x) = (f(u(x)))' = u'(x)f'(u(x))$ se retrouve très facilement en utilisant la notation différentielle

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

b Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

Introduisons cette notion sur l'exemple d'une fonction de deux variables :

$$(x, y) \rightarrow f(x, y).$$

Si on gèle la variable y pour la considérer comme un paramètre, on définit une fonction d'une variable $x \rightarrow F_y(x)$. Si la fonction F_y est dérivable, on définit la *dérivée partielle* de f par rapport à x par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F'_y(x)$$

Les deux variables jouant des rôles symétriques, si on gèle la variable x pour la considérer comme un paramètre, on définit une fonction d'une variable $y \rightarrow G_x(y)$. Si la fonction G_x est dérivable, on définit la *dérivée partielle* de f par rapport à y par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = G'_x(y)$$

c Différentielle d'une fonction réelle de deux variables réelles

f étant une fonction réelle de deux variables réelles $(x, y) \rightarrow f(x, y)$, on appelle *différentielle* de f , notée df , l'application linéaire $(dx, dy) \rightarrow df$ qui réalise la meilleure approximation de l'accroissement $f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$.

Dans le cas de plusieurs variables, une application linéaire n'est plus une simple multiplication par une constante A , mais une combinaison linéaire

$$df = A dx + B dy$$

En effectuant le développement à l'ordre 1 de f au voisinage de x en gelant y , on peut écrire, en notant $\frac{\partial f}{\partial x}$ la *dérivée partielle* de f par rapport à x

$$f(x + dx, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + o(dx) \text{ donc } A = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

On en déduit que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

d Dérivées partielles secondes et théorème de Schwarz

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles-mêmes des fonctions de deux variables, susceptibles d'être dérivées. On utilise les notations condensées :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, le *théorème de Schwarz* indique que l'ordre des dérivations est indifférent, soit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

I.3 Expressions des fonctions d'état

Système	Gaz parfait	Phase condensée	Système diphasé
Énergie interne	$dU = C_V dT$	$dU = C dT$	pas d'expression directe
Enthalpie	$dH = C_P dT$	$dH = C dT$	$dH = dn_2 H_{m,1 \rightarrow 2}$
Entropie	$dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$ $dS = C_P \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$	$dS = C \frac{dT}{T}$	$dS = dn_2 \frac{L_{m,1 \rightarrow 2}}{T}$ $dS = dm_2 \frac{\ell_{1 \rightarrow 2}}{T}$

I.4 Application : trempe d'un solide

On considère une sphère de métal de capacité thermique C , initialement à la température T_0 , qu'on plonge dans un thermostat (une grande bassine d'eau) à la température $T_f \neq T_0$.

On admet que le transfert thermique reçu par la sphère pendant une durée dt est proportionnel à dt et à l'écart de température entre la sphère et le thermostat :

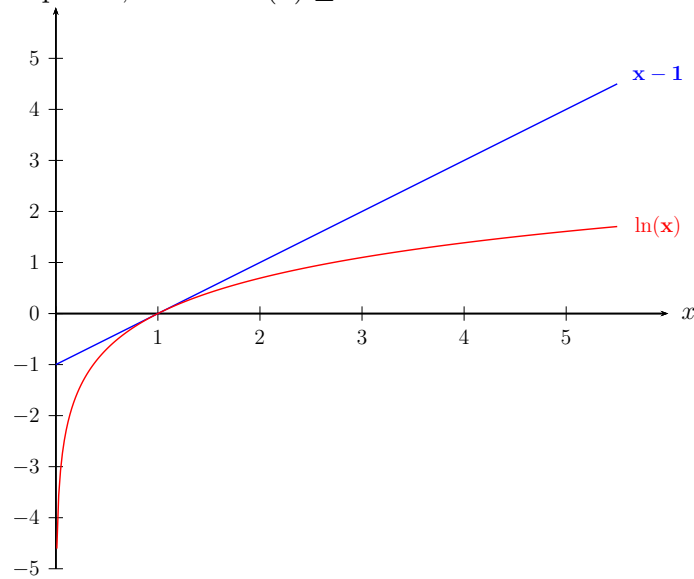
$$\delta Q = -h(T - T_f)dt$$

On suppose qu'il n'existe aucune variation d'énergie mécanique.

1. Quelle est la température de la sphère à l'état d'équilibre final ?
2. Déterminer l'expression de T en fonction du temps.
3. Montrer que la transformation est irréversible.
4. Faire un bilan entropique sur une transformation infinitésimale. Commentaire.

On donne $S(T) = S(T_0) + C \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)$.

Rappel : Pour x strictement positif, $x - 1 - \ln(x) \geq 0$:



II Systèmes ouverts en régime stationnaire

II.1 Définitions

II.2 Débit massique

II.3 Passage d'un système ouvert à un système fermé

II.4 Premier principe pour un système ouvert

Premier principe industriel :

Pour un fluide en écoulement stationnaire au travers d'un organe, le premier principe s'écrit :

$$\left[h + gz + \frac{c^2}{2} \right]_e^s = w_u + q \text{ en massique}$$

$$D_m \left[h + gz + \frac{c^2}{2} \right]_e^s = P_u + P_{th} \text{ en puissance}$$

- $h_{s,e}$ enthalpie massique en entrée/sortie ;
- $gz_{s,e}$ énergie potentielle massique de pesanteur en entrée/sortie ;
- $\frac{c_{s,e}^2}{2}$ énergie cinétique massique en entrée/sortie ;
- D_m (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) le débit massique au travers de la machine ;
- $P_{u,th}$ puissances mécanique et thermique reçues dans l'organe étudié ;
- w_u et q le travail utile et le transfert thermique reçus par unité de masse traversant dans l'organe étudié.

II.5 Expression du second principe

Pour un fluide en écoulement stationnaire au travers d'un organe, le second principe s'écrit :

$$s_s - s_e = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}}$$

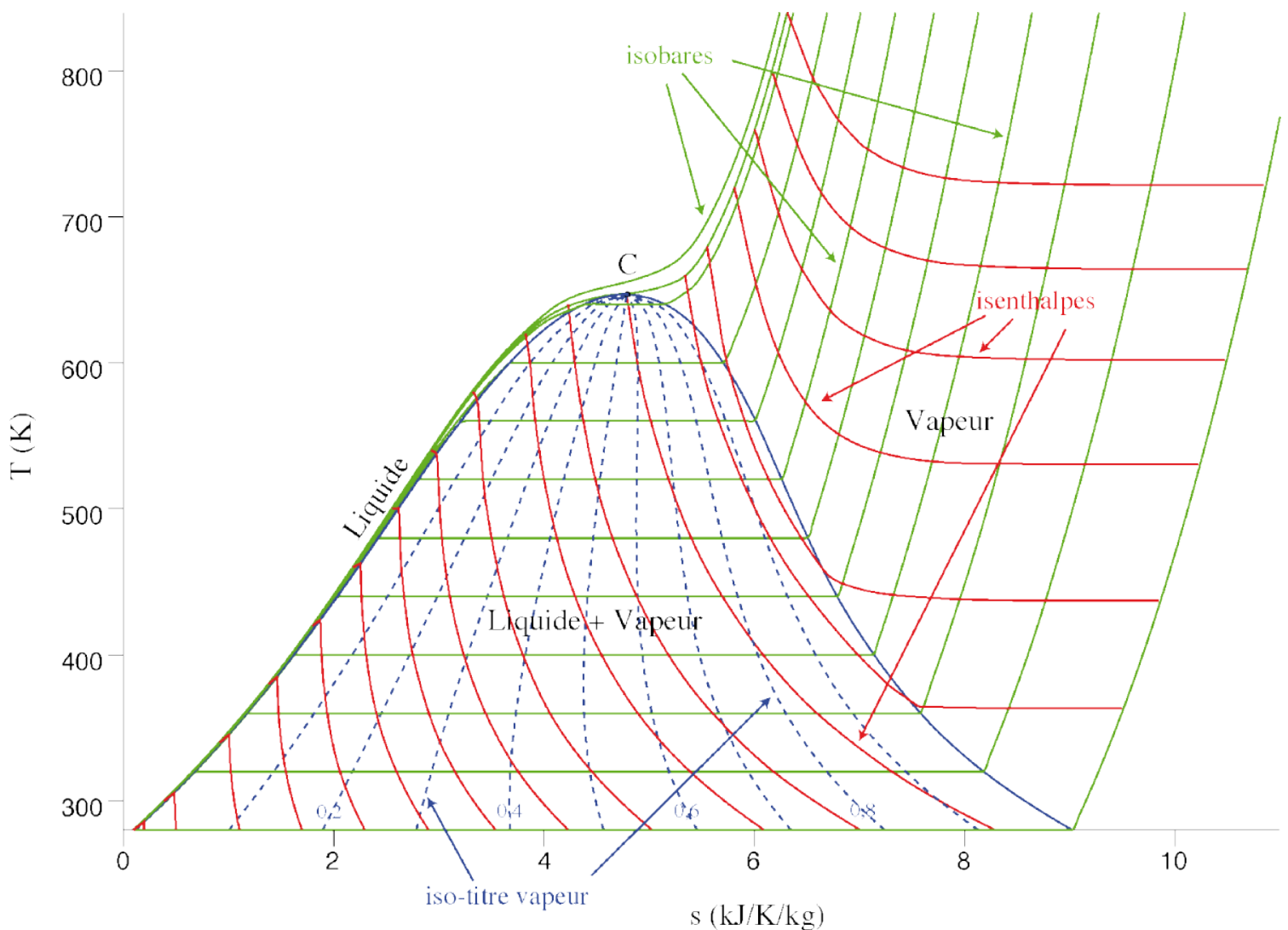
avec $s_{\text{éch}} = \frac{q}{T_s}$ terme d'échange

et $s_{\text{créée}} \geq 0$ terme de création.

II.6 Exemples d'organes

III Diagrammes thermodynamiques pour les fluides réels

III.1 Diagramme entropique (T, s)

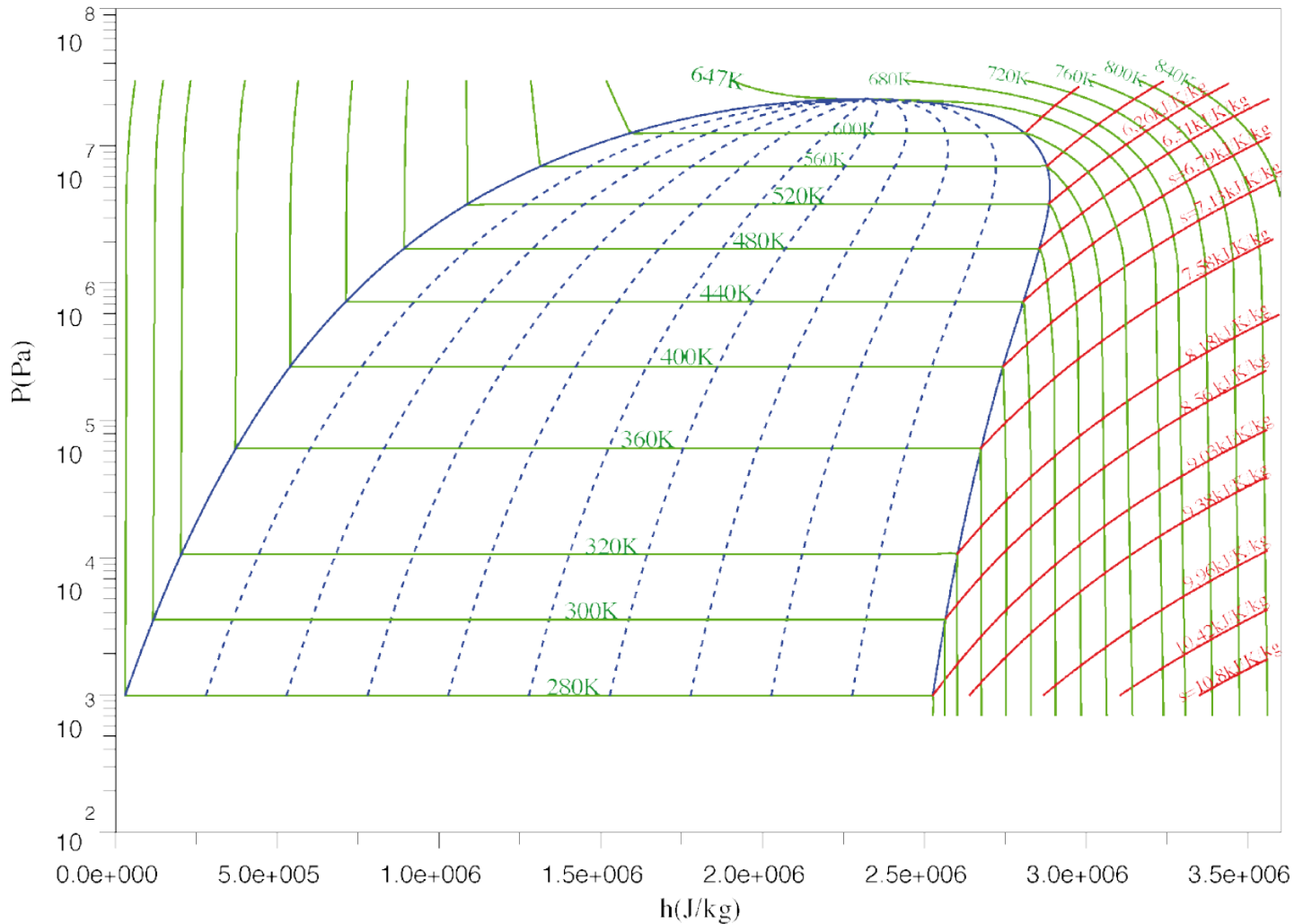


III.2 Diagramme du frigorigère (p, h)

On appelle diagramme des frigorigères un diagramme d'état représentant la pression P en fonction de l'enthalpie massique h du fluide. L'axe des pressions est gradué en échelle logarithmique.

En abscisse : échelle linéaire des enthalpies massiques.

En ordonnée : échelle logarithmique des pressions.



Allure générale

On distingue trois zones, séparées par une frontière (trait bleu marine continu) qui correspond au lieu d'apparition d'un changement d'état. Au sommet de la frontière (courbe de saturation) figure le point critique C . Sous la frontière se situent les états d'équilibre liquide-vapeur.

Sur la partie gauche de la frontière, le fluide est à l'état liquide.

La partie droite du diagramme correspond à la vapeur sèche.

Exercice : Déterminer l'enthalpie massique de vaporisation du corps pur sous la pression $p = 1$ bar.

Enthalpie massique du liquide saturant :

Enthalpie massique de la vapeur saturante :

Enthalpie massique de vaporisation :

Réseaux de courbes

Outre les domaines, on trace sur le diagramme des frigoristes des réseaux de courbes sur lesquelles les différentes grandeurs thermodynamiques intensives du fluide sont constantes : ce sont donc des courbes iso-quelque chose.

- Les **isobares** ($P = \text{cte}$) coïncident avec l'axe des ordonnées : ce sont des segments de droites horizontales.

Exercice : Tracer en bleu clair l'isobare $P = 2,0$ bar

- Les **isenthalpes** ($h = \text{cte}$) coïncident avec l'axe des abscisses : ce sont des segments de droites verticales.

Exercice : Tracer en rose l'isenthalpe $h = 2,0 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$

- Dans la zone d'équilibre liquide-vapeur apparaissent des courbes **isotitres** ($x_G = \text{cte}$, en pointillés bleus ici). Ces courbes n'existent que dans le domaine diphasé. Elles se rejoignent toutes au point critique.

La frontière avec la zone de vapeur sèche est l'isotitre $x_G = 1$, tandis que le lieu du liquide est l'isotitre $x_G = 0$.

Un état diphasé est défini par sa pression (ou la température du changement d'état) et la valeur de x_G .

Exercice : Déterminer l'enthalpie massique de l'état diphasé possédant un titre massique en vapeur $x_G = 0,40$ sous la pression $p = 1$ bar.

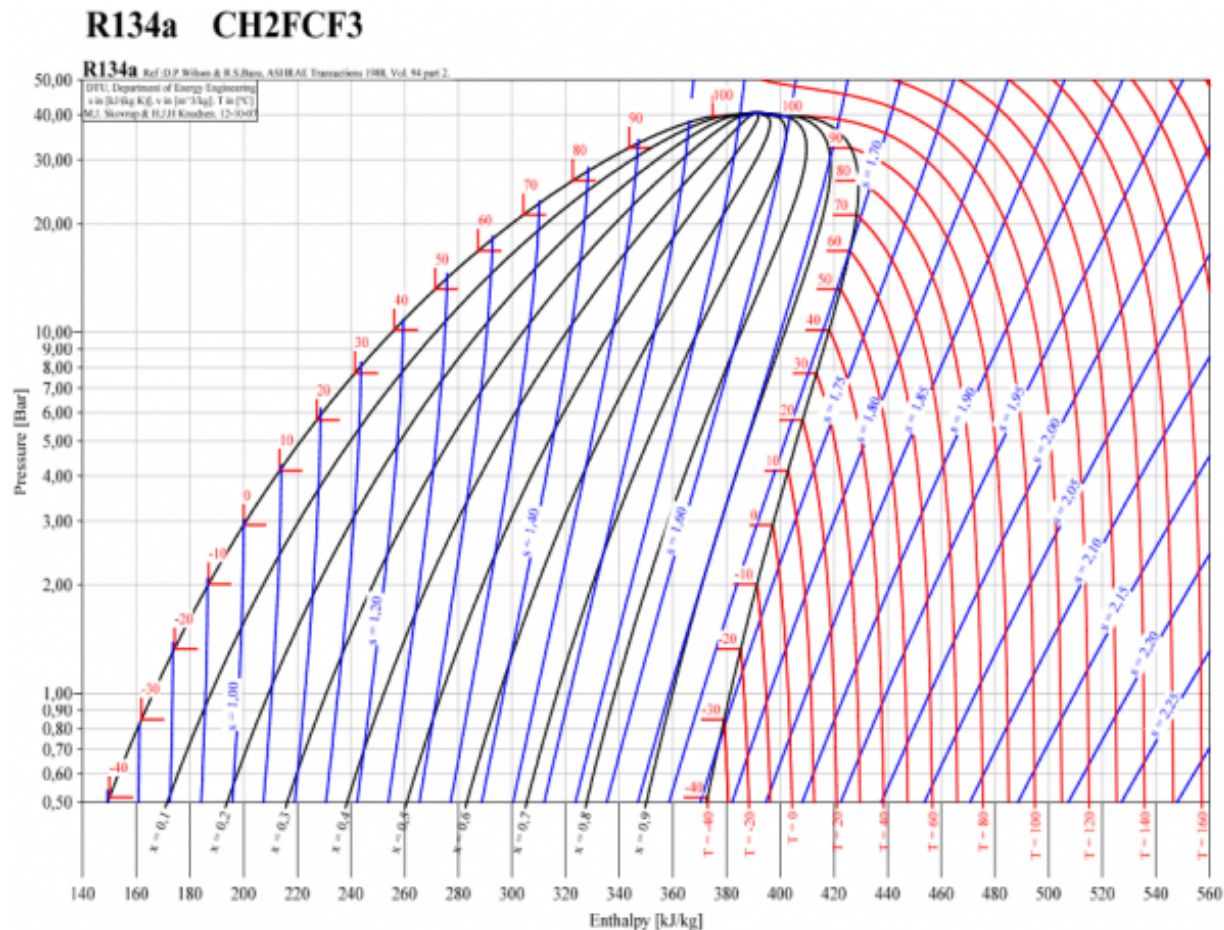
.....

- Les **isothermes** ($T = \text{cte}$, ici en vert clair) ont une forme plus compliquée.
 - * Dans le domaine liquide, ce sont des droites quasi-verticales : pour une phase condensée, l'enthalpie ne dépend presque pas de T donc si T est constante alors h l'est aussi.
 - * Dans le domaine diphasé, ce sont des droites horizontales : dans un domaine de coexistence, si T est fixée alors la pression l'est aussi et vaut $P = P_{\text{sat}}(T)$, pression de vapeur saturante.
 - * Dans le domaine gaz, les isothermes sont courbées, mais tendent vers des droites verticales dans la limite basse pression. Le gaz est de plus en proche d'un gaz parfait, pour lequel h ne dépend que de T : si T est constante alors h l'est aussi.

Pour que le diagramme reste lisible, l'usage consiste à ne pas tracer complètement les isothermes dans les parties rectilignes mais à seulement indiquer par des encoches leurs intersections avec la courbe de saturation. Les isothermes sont graduées au niveau de ces encoches (cf diagramme suivant).

Exercice : Déterminer la température de vaporisation du corps pur sous une pression $p = 1$ bar.

- Les **isentropes** (entropie massique $s = \text{cte}$, en rouge), ne présentent aucun changement de pente (aucun point anguleux) au passage d'un domaine à l'autre (cf courbes bleues du diagramme suivant). Dans le domaine liquide, ce sont des droites quasi-verticales : pour une phase condensée, l'entropie ne dépend pratiquement que de la température, si bien que les isentropes se confondent avec les isothermes et donc les isenthalpes. Comme pour les isothermes, la partie verticale est rarement tracée. Les isentropes sont graduées à leur intersection avec l'axe des abscisses ou le long de la courbe.
- On peut également observer des **isochores** (volume massique $v = \text{cte}$), mais elles sont d'utilisation moins courante.



III.3 Application : machine réfrigérante

a Description du cycle

Au point 1, le fluide est dans un état de vapeur sèche à la pression $p_1 = 2,0$ bar et à la température $T_1 = -5^\circ\text{C}$.

Dans le **compresseur**, le fluide subit une transformation **adiabatique réversible** le menant dans l'état 2 à la pression $p_2 = 9,0$ bar.

Dans le **condenseur**, l'évolution est **isobare** ($p = p_2$) : le fluide change d'état de manière isotherme ($T_{liq} = 35^\circ\text{C}$). Au cours de cette transformation, un transfert thermique a lieu entre le fluide et un thermostat, qui est l'extérieur de l'enceinte réfrigérée. En pratique, c'est l'atmosphère de la pièce où se trouve la machine qui joue le rôle de thermostat.

Dans l'état 3, le fluide est liquide à la pression p_2 .

Dans le **détendeur**, le fluide subit une **détente isenthalpique** : on parle de détente de Joule-Kelvin. L'état 4 atteint la même pression p_1 que l'état 1. On note $x_4 = 0,24$ le taux de vapeur correspondant.

Dans l'**évaporateur**, l'évolution $4 \rightarrow 1$ qui termine le cycle est **isobare**. Il s'agit de la vaporisation du fluide jusqu'à revenir à l'état initial 1.

Au cours de ce changement d'état isobare et isotherme, un transfert thermique a lieu de la source froide, l'enceinte réfrigérée, vers le fluide.

C'est la phase utile au cours de laquelle est extraite de l'énergie thermique visant à maintenir l'enceinte à une température inférieure à celle de la pièce malgré les échanges à travers les parois, et lors des ouvertures de porte.

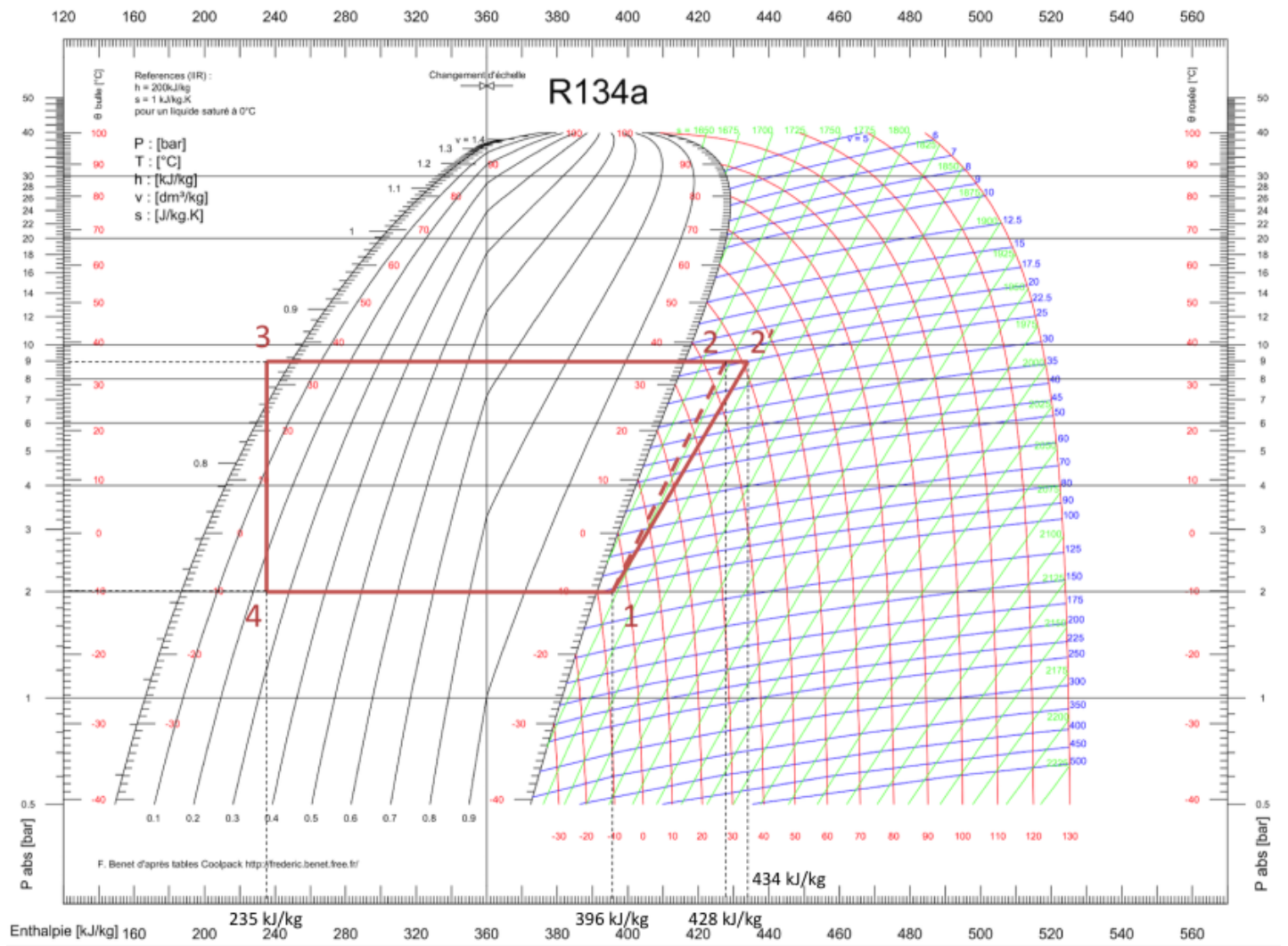
b Exploitation du diagramme

Compresseur : $1 \rightarrow 2$ le fluide suit l'isentropique $s = 1,75 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

Condenseur : $2 \rightarrow 3$: isobare $p = p_2$

Détendeur : $3 \rightarrow 4$: isenthalpe, sur le diagramme, on suit donc entre 3 et 4 un segment de droite vertical.

Évaporateur : $4 \rightarrow 1$ est isobare $p = p_1$.



c Bilan énergétique

L'efficacité de la machine est reliée aux différences d'enthalpies massiques entre les différents points du cycle.

$$e = \frac{q_f}{w_{comp}} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$$

On lit sur le diagramme : $h_1 = 396 \text{ kJ.kg}^{-1}$, $h_2 = 428 \text{ kJ.kg}^{-1}$, $h_3 = h_4 = 235 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

On en déduit

$$e = 5,0$$

que l'on compare à l'efficacité de Carnot, $e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 5,8$.

On a bien $e < e_C$.