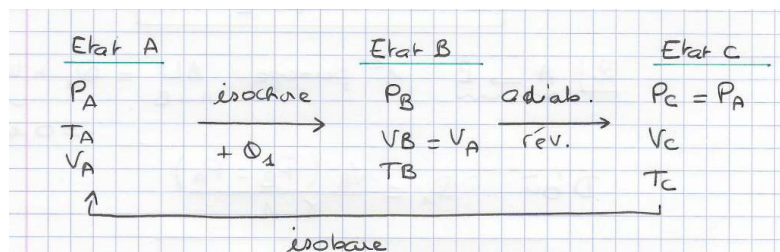


Première partie

Une machine thermique



1. Quelques propriétés du GP

(a) Equation d'état $PV = nRT$

(b) Relation de Mayer $C_p = C_m + R$

En effet par définition

$$C_m = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V = \frac{dU_m}{dT}$$

1^{er} bi de Joule

De même $C_p = \left(\frac{\partial H_m}{\partial T} \right)_P = \frac{dH_m}{dT}$

2^{ème} bi de Joule

et $H_m = U_m + PV_m = U_m + RT$

soit $\frac{dH_m}{dT} = \frac{dU_m}{dT} + R$

D'où $C_p = C_m + R$

(c) $\gamma = \frac{C_p}{C_m} = \frac{C_m + R}{C_m} = 1 + \frac{R}{C_m}$ $\gamma = \frac{7}{5}$

(d) On en déduit $C_m = \frac{R}{\gamma - 1}$ or $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

On a $\Delta U = n C_m (T_1 - T_0)$
 $= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$

$$\Delta U = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}$$

2. $A \rightarrow B$ 1^{er} principe $\Delta U_{A \rightarrow B} = Q_1 + W_{AB}$
 $= 0$ car isochore

D'où $Q_1 = \frac{V_A (P_B - P_A)}{\gamma - 1}$

$$P_B = P_A + (\gamma - 1) \frac{Q_1}{V_A}$$

AN $P_B = 8,0 \text{ bar}$

On a $P_B V_B = nRT_B$

$$P_A V_A + (\gamma - 1) Q_1 = nRT_B$$

$$T_B = T_A + \frac{Q_1}{nR} (\gamma - 1) \quad \text{avec } nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$$

$$= T_A \left[1 + (\gamma - 1) \left(\frac{Q_1}{P_A V_A} \right) \right]$$

ou $\frac{nR}{\gamma - 1} (T_B - T_A) = Q_1$

AN: $T_B = 2,4 \text{ k}^\circ \text{K}$

$B \rightarrow C$ Transformation adiabatique

réversible d'un GP, on peut appliquer les lois de Laplace

$$\frac{P_C}{P_B} = \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^\gamma$$

$$P_C = 1,06^5 \text{ Pa}$$

$$P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$$

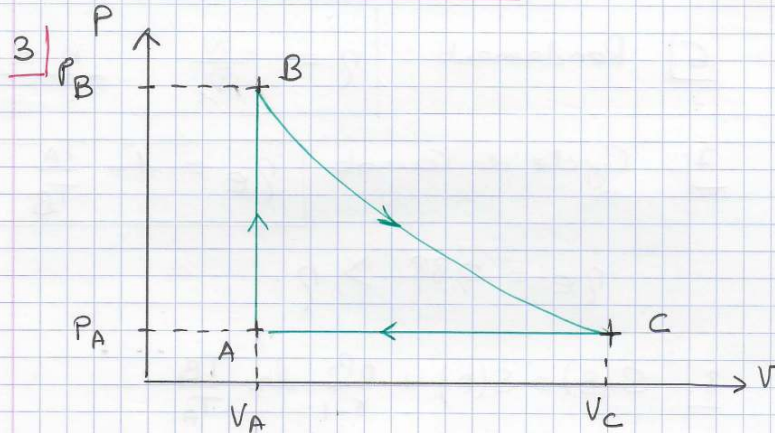
$$V_C = V_A \times \left(\frac{P_B}{P_C} \right)^{1/\gamma}$$

AN: $V_C = 8,8 \text{ L}$

$$\text{or } T_c = \frac{P_c V_c}{nR} = \frac{P_A V_A}{P_A V_A} (P_B/P_c)^{1/\gamma} T_A$$

$$T_c = T_A \cdot \left(\frac{P_B}{P_c} \right)^{1/\gamma}$$

$$T_c = 1,36^3 \text{ K.}$$



4] $C \rightarrow A$ Transformation isobare

$$Q_2 = \Delta H_{C \rightarrow A} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} (T_A - T_c)$$

$$Q_2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (P_A V_A - P_A V_c)$$

$$Q_2 = -2,4 \text{ kJ} \quad \text{ou } \Delta U = 0 = W + Q_1 + Q_2$$

5] Au cours du cycle $W_{A \rightarrow B} = 0$ car isochore

$$W_{B \rightarrow C} = \Delta U_{B \rightarrow C} \quad \text{car adiabatique}$$

$$= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_c - T_B) = \frac{P_c V_c - P_B V_B}{\gamma - 1}$$

$$W_{C \rightarrow A} = -P_A (V_A - V_c) \quad \text{car isobare}$$

$$\text{D'où } W = \frac{P_A V_c - P_B V_A}{\gamma - 1} + P_A (V_c - V_A)$$

$$W = -1,1 \text{ kJ} < 0 \quad \text{moteur}$$

6] Rendement : $\eta = \frac{-W}{Q_1} \quad \eta = 0,31.$

7] Cycle de Carnot $\eta_e = 1 - \frac{T_A}{T_B}$

$$\eta_e = 0,88 > \eta.$$

8] $S(B) = S(A) + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_B}{T_A}$

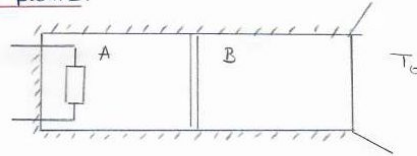
$$S(C) = S(B)$$

$$S(B) = 3,5 \text{ J K}^{-1}$$

Deuxième partie

Transformations de gaz parfaits

Première partie.



1) On a $2V_0 = V_A + V_B$.

Compartment A

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \longrightarrow & P_f \\ V_0 & \longrightarrow & V_A \\ T_0 & & T_1 \end{array}$$

Compartment B

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\text{isotherme}} & P_f \\ V_0 & & V_B \\ T_0 & & T_0 \end{array}$$

avec $P_f V_A = R T_1$
 $P_f V_B = R T_0 = P_0 V_0$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_1}{T_0}$$

soit $2V_0 = V_A + V_A \frac{T_0}{T_1}$ $V_A = V_0 \frac{2}{1 + \frac{T_0}{T_1}} = V_0 \frac{2T_1}{T_1 + T_0}$

$$\text{et } V_B = 2V_0 - V_A \frac{T_0}{T_1} = 2V_0 \frac{T_0}{T_1 + T_0}$$

$$\text{et } P_f = P_0 \frac{V_0}{V_B} = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2T_0}$$

2) a) $\Delta U(A)$ = variation d'énergie interne de A
 Pour un gaz parfait $U(T)$ (1^{ère} loi de Joule)

$$\Delta U(A) = C_v(T_1 - T_0) = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0)$$

$$\Delta U(B) = 0 \quad (T_f = T_i = T_0 \text{ pour la transformation})$$

$$\Delta U(A+B) = \Delta U(A) + \Delta U(B) = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) \quad \begin{array}{l} U \text{ fonction} \\ \text{d'état} \\ \text{externe} \end{array}$$

b) Le gaz en B subit une transformation isotherme mécaniquement réversible.

$$\delta w_1 = -P_{\text{ext}} dV = -P dV = -nRT_0 \frac{dV}{V} \quad \begin{array}{l} \text{travail élémentaire} \\ \text{reçu par B} \end{array}$$

$$w_1 = -nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_0} = -nRT_0 \ln \frac{2T_0}{T_0 + T_1} \quad n = 1 \text{ mol.}$$

$$\text{Comme } \Delta U(B) = 0 = w_1 - Q_1 \quad \uparrow \text{ reçue par le thermostat}$$

$$Q_1 = w_1 = -RT_0 \ln \frac{2T_0}{T_0 + T_1}$$

c) Pour le système A $\Delta U(A) = Q_2 + w_2$
 $= Q_2 - w_1$

$$Q_2 = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) - RT_0 \ln \frac{2T_0}{T_0 + T_1}$$

Première partie 3)

$$\Delta S(A) = R \left[\frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} + \ln \frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right]$$

$$\Delta S(B) = R \ln \frac{2T_0}{T_1 + T_0}$$

Deuxième partie

1] Le gaz en A subit une transformation adiabatique réversible.

Il suit la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cte}$

$$P_f V_A^\gamma = P_f' V_0^\gamma \quad P_f' = P_f \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right)^\gamma$$

$$P_f' = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2T_0} \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right)^\gamma = P_0 \frac{T_1^\gamma}{T_0} \left(\frac{2}{T_1 + T_0} \right)^{\gamma-1}$$

2] $P_f' V_0 = RT_A'$

or $P_f' V_0 = RT_B'$

$$T_A' = T_B' = \frac{T_1^\gamma}{T_0} \left(\frac{2}{T_1 + T_0} \right)^{\gamma-1} \frac{P_0 V_0}{R}$$

$$T_A' = T_B' = T_2 \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right)^{\gamma-1}$$

3] $\Delta U(A+B) = \Delta U(A) + \Delta U(B)$

$$\Delta U(A+B) = \frac{3}{2} R (T_A' - T_0) + \frac{3}{2} R (T_B' - T_0)$$

$$= 3RT_2 \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right)^{\gamma-1} - \frac{3}{2} R (T_1 + T_0)$$

4] Soit Φ_3 la chaleur fournie par la deuxième résistance chauffante

$$\Delta U(B) = \Phi_3 + W_3$$

or $\Delta U(A+B) = \Phi_3$ A+B a un volume constant.

$$\Phi_3 = \frac{3}{2} RT_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right)^{\gamma-1} - 1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$$

Deuxième partie 5]

$$\Delta S'(A) = R \left[\frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_A'}{T_2} + \ln \frac{2T_1}{T_2 + T_0} \right]$$

$$= R \left[1 \cdot \ln \frac{2T_1}{T_2 + T_0} - \ln \frac{2T_1}{T_1 + T_0} \right] = 0 \quad (\text{normal})$$

$$\Delta S'(B) = R \left[\frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_B'}{T_2} - \ln \frac{2T_0}{T_2 + T_0} \right]$$

$$\Delta S'(B) = R \ln \frac{T_2}{T_0}$$

Troisième partie

Pompe à chaleur géothermique

Rappels et généralités

1. P ↑

2. a) On a la relation $h_v(T) = h_v(T) - h_L(T)$

b) Relation de Mayer

$$C_p = C_v + nR \quad \text{avec } n = \frac{m}{M}$$

soit

$$C_p = \frac{C_p}{\gamma} + \frac{mR}{M} \quad \text{et } C_v = \frac{C_p}{\gamma}$$

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

c) Pour un GP h ne dépend que de T

$$h(T) = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T + h_0 \quad \begin{matrix} 2^{\text{e}} \text{ loi de Joule} \\ \oplus \text{ déf } C_p \\ C_p = \frac{dh}{dT} \end{matrix}$$

3. a. Pour une PAC

$$\begin{matrix} w > 0 \\ q_c < 0 \\ q_f > 0 \end{matrix}$$

Par déf $e = \frac{-q_c}{w}$

or $w = -q_c - q_f$

soit $e = \frac{-q_c}{-q_c - q_f} = \frac{1}{1 + \frac{q_f}{q_c}} \geq 1$

$\frac{q_f}{q_c} < 0$

b) D'après l'inégalité de Carnot données

$$\frac{q_f}{T_f} + \frac{q_c}{T_c} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{q_f}{q_c} \geq -\frac{T_f}{T_c}$$

soit $1 + \frac{q_f}{q_c} \geq 1 - \frac{T_f}{T_c} > 0$

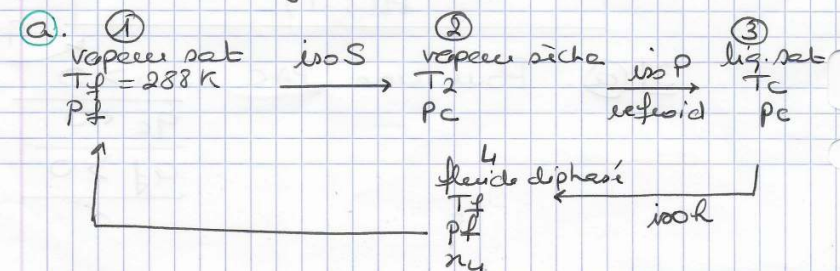
$$\frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} \geq e$$

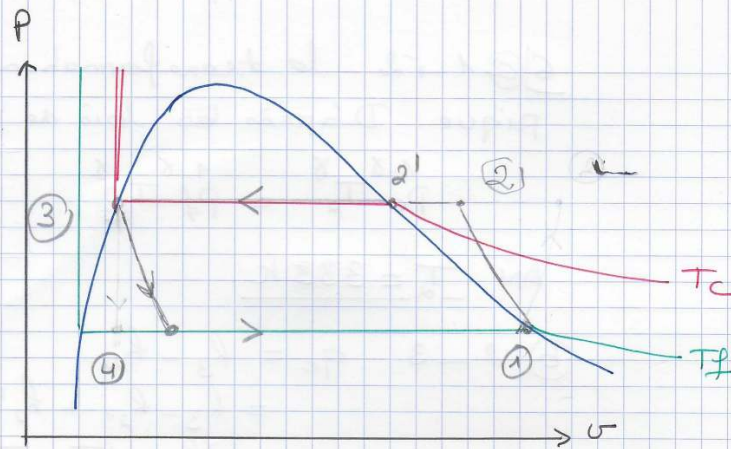
$$e_{\max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

$e = e_c$ lorsque les transformations sont réversibles.

Etude d'une PAC

4. Abaisse du cycle





- (b) q_c correspond à l'étape $2 \rightarrow 3$.
 q_f correspond à l'étape $4 \rightarrow 1$

- (c) Dans l'étape $2 \rightarrow 3$ c'est l'air intérieur à la maison qui joue le rôle de thermostat.

5. (a) w correspond à l'aire du cycle sur le diagramme de Clapeyron.

- (b) Si on augmente $T_f \Rightarrow$ l'aire du cycle diminue DON que q_c change significativement $\Rightarrow e \uparrow$

6. (a) $1 \rightarrow 2$ la transformation est isentropique. D'après les lois de Laplace

$$P_c T_2^{1-\gamma} = P_f T_f^{1-\gamma} \quad T_2 = T_f \left(\frac{P_f}{P_c} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

AN $T_2 = 335 \text{ K}$

- (b) $2 \rightarrow 3 \quad q_c = h_3 - h_2$
 $= h_3 - h_2' + h_2' - h_2$
 $= \frac{\gamma R}{\gamma - 1} M (T_c - T_2) - h(T_c)$

AN $q_c = -158 \text{ kJ kg}^{-1}$

- (c) 1^{er} terme 6 kJ kg^{-1} ← beaucoup plus faible
 2nd terme 151 kJ kg^{-1}
 q_c est principalement due au changement d'état

7. $3 \rightarrow 4$ est une transformation isothermique
 $h_4 = h_3 = h_c(T_c)$

Théorème des moments

$$x_4 = \frac{h_4 - h_L(T_f)}{h_v(T_f) - h_L(T_f)}$$

$x_4 = 0,272$

8. $q_f = (1 - x_4) h_v(T_f) \quad q_f = 135,1 \text{ kJ kg}^{-1}$

9. $w = -q_f - q_c \quad w = 23 \text{ kJ kg}^{-1}$

10. (a) $e = \frac{-q_c}{w} = 1 + \frac{q_f}{w} = 1 + \frac{h_4 - h_L(T)}{h_2 - h_1} \quad 6,36$

b $e_c = \frac{T_c}{T_c - T_f} \quad e_c = 9,23 > e$ Irréversibilité