

Diffusion thermique

Applications directes du cours

- [1] Montrer par un bilan, puis directement à partir de l'équation de conservation, qu'en régime stationnaire et sans terme source, à 1D, le flux à travers toute section S de la barre est conservé : $\Phi_{th}(x) = \Phi_0$.
- [2] Montrer, à partir de l'équation de conservation, qu'en régime stationnaire et sans terme source, le flux à travers toute surface fermée est nul.
- [3] Un artisan verrier chauffe le milieu d'un tube en verre ($D_{th} \simeq 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) de longueur 40 cm pour pouvoir y créer un coude. Pendant combien de temps environ peut-il tenir à pleines mains les extrémités du tube sans se brûler ?
- [4] On accole bout à bout 2 tiges de même section, de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 , de conductivité thermique respectivement λ_1 et λ_2 , dont les extrémités sont maintenues respectivement à $T_{1,0}$ et $T_{2,0}$. On suppose l'ensemble isolé thermiquement.
Quelle est la température de la jonction en régime stationnaire ?
- [5] Comparer, en ordre de grandeur, la résistance thermique d'un vitrage simple en verre d'épaisseur e et celle d'un double vitrage constitué de 2 couches de verre d'épaisseur $e/3$ séparées par un espace d'épaisseur $e/3$ rempli d'air.

[1] cf cours. [2] Théorème d'Ostrogradski. [3] $\tau \simeq \frac{L^2}{D}$, $\tau \simeq 4 \cdot 10^4 \text{ s}$. [4] $T_i = \frac{\ell_1 \lambda_2 T_{2,0} + \ell_2 \lambda_1 T_{1,0}}{\ell_2 \lambda_1 + \ell_1 \lambda_2}$. [5] $R_{th,D} \simeq 7 R_{th,s}$

Exercices

1. Sensation de chaud

On étudie un modèle destiné à interpréter l'observation suivante : en posant la main sur une table en bois ou une table en acier à la même température, on a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier.

Deux cylindres de même section S , de même axe Ox , de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 , de longueurs L_1 et L_2 sont mis bout à bout, le contact s'établissant en $x = 0$. On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures T_1 et T_2 . On étudie un régime stationnaire pour lequel la température ne dépend que de x .

1. Établir l'expression de $T(x)$ dans chaque cylindre en fonction de T_1 , T_2 , L_1 , L_2 et de la température T_0 en $x = 0$.
2. En déduire que la température T_0 est un barycentre de T_1 et T_2 . Faire une analogie avec l'électrocinétique.
3. On prend $T_1 = 37^\circ\text{C}$ (main) et $T_2 = 20^\circ\text{C}$ (acier ou bois) et on suppose $L_1 = L_2$. On donne les conductivités thermiques de la main $\lambda_1 = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, du bois $\lambda_2 = 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et de l'acier $\lambda'_2 = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
Calculer T_0 pour un contact main-bois et T'_0 pour un contact main-acier. Commenter.

2. Conduction thermique entre deux cylindres coaxiaux

On considère 2 cylindres coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et R_2 . On néglige tout effet de bord : les cylindres sont infinis, mais on raisonne sur une hauteur H , et on admet que le transfert thermique est purement radial. On impose T_1 la température du cylindre intérieur et T_2 la température du cylindre extérieur, constantes. La conductivité thermique du matériau entre les deux cylindres est λ . On se place en régime stationnaire.

1. Montrer que le flux thermique est indépendant de r . En déduire la loi $T(r)$.
2. Définir et calculer la résistance thermique de cette portion de cylindre.
3. Application : de l'eau chaude à $T_1 = 50^\circ\text{C}$ est située dans une canalisation en cuivre ($\lambda_{\text{Cu}} = 4 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) de rayon intérieur $R_1 = 1 \text{ cm}$ d'épaisseur 1 mm. Elle est isolée de l'air extérieur (à $T_a = 5^\circ\text{C}$) par une isolation

constituée d'une couche de laine de verre d'épaisseur $e_1 = 1,5$ cm ($\lambda_{lv} = 0,04$ W.m⁻¹.K⁻¹), recouverte d'un film d'aluminium ($\lambda_{Al} = 2 \cdot 10^2$ W.m⁻¹.K⁻¹) d'épaisseur $e_2 = 0,2$ mm. Déterminer la résistance thermique de chaque couche puis tracer $T(r)$, en évaluant la température pour chaque jonction.

3. Barre non isolée latéralement

Une barre cylindrique, d'axe Ox , de rayon R , section S et de longueur L , est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ .

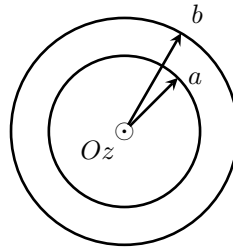
Les températures des deux extrémités sont T_1 et T_2 ; elle est plongée dans un fluide à température T_f .

On admet que la température est uniforme dans une section, soit $T(x, t)$. La barre évacue de l'énergie par sa surface latérale à raison d'une quantité $h(T - T_f)$ par unité de temps et de surface.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $T(x, t)$; en déduire la répartition de température de la barre en régime stationnaire.

4. Effet Joule dans un tube

Un métal, homogène et isotrope, de conductivité thermique λ considérée constante occupe l'espace compris entre deux cylindres infinis et coaxiaux. Le cylindre intérieur a un rayon a et le cylindre extérieur un rayon b . L'intérieur du tube est chauffé par effet Joule, avec une puissance linéique P constante. À l'extérieur du système, la température est maintenue constante à la valeur T_e . On s'intéresse à la diffusion thermique radiale entre les deux cylindres.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température en régime stationnaire.
2. En déduire l'expression de la température T en fonction de r , a , b , T_e et $T_i = T(a)$.
3. Déterminer λ en fonction de P , T_i , T_e , a et b .
4. *Application numérique* : $a = 5$ mm, $b = 6$ mm, $T_i = 25, 15^\circ\text{C}$, $T_e = 25, 0^\circ\text{C}$, $P = 2$ kW.m⁻¹.
5. Définir et exprimer la résistance thermique d'un tronçon de hauteur H . La calculer pour $H = 1$ m.

5. Fusible

Un fil cylindrique, de longueur ℓ et de rayon $a \ll \ell$ est parcouru par un courant électrique d'intensité I . La densité de courant est dirigée selon le vecteur $\vec{e}_z$ parallèle à l'axe du cylindre. On suppose le fil suffisamment long pour que la température soit fonction seulement de r en coordonnées cylindriques.

On donne le laplacien de T lorsque T ne dépend que de r en repère cylindrique :

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

et on rappelle que pour un cylindre de longueur ℓ et de rayon a , la résistance électrique est $R_e = \frac{\ell}{\sigma \pi a^2}$.

1. Montrer que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = AI^2$$

où l'on exprimera la constante A en fonction de la conductivité électrique σ , de la conductivité thermique λ , de l'intensité I et des paramètres géométriques du fil.

2. Montrer que $T(r) = B - Cr^2$, où l'on explicitera C . Pour quelle valeur de r la température est-elle maximale ?

3. Dans un premier modèle, on suppose que l'atmosphère impose une température T_a en $r = a$. On appelle a_M le rayon du fil pour lequel la fusion s'amorce pour une intensité I_M . On note T_f la température de fusion du matériau. Comment a_M varie-t-il en fonction de I_M ?
4. Dans un modèle plus réaliste, on suppose que la puissance transmise par le fil à l'atmosphère de température T_a est $\mathcal{P} = 2\pi a h (T(a) - T_a)$ où h est une constante d'échange conducto-convectif telle que $ah \ll \lambda$. On appelle toujours a_M le rayon du fil pour lequel la fusion s'amorce pour une intensité I_M et T_f la température de fusion du matériau. Comment a_M varie-t-il en fonction de I_M ?

6. Diffusion thermique et mammifères marins

On considère un mammifère marin modélisé par une sphère de rayon R plongée dans l'eau. Ses cellules sont le siège de réactions exothermiques qui produisent une puissance volumique p_V . Ceci produit une puissance totale $\mathcal{P}$ qui maintient le mammifère à température constante. On note λ la conductivité thermique de l'eau (pour $r > R$) et T_0 la température dans l'eau, à l'infini. On se place en régime stationnaire.

1. Déterminer l'expression de la puissance totale $\mathcal{P}$ dégagé par le mammifère en fonction de p_V et R .
2. Établir l'expression du vecteur densité de courant thermique en $r > R$ en fonction de p_V , r et R .
3. Déterminer l'expression de la température $T(r)$ à une distance r du centre du mammifère, en fonction de T_0 , λ et $\mathcal{P}$. En déduire la température cutanée T_c de l'animal en $r = R$.
4. Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ en fonction de T_c , T_0 , λ et R .
5. Quelle doit être la valeur de $\mathcal{P}$ pour avoir $T_c = 30^\circ\text{C}$ avec $R = 25\text{ cm}$.
6. Expliquer pourquoi il ne peut pas exister de petit mammifère marin dans l'eau. Ce raisonnement est-il valable sur Terre ?

Données : $\lambda_{\text{air}} = 0,003\text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$; $\lambda_{\text{eau}} = 5,0 \cdot 10^{-1}\text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$; $T_0 = 10^\circ\text{C}$.

7. Création d'entropie dans une tige indilatable

On considère une tige de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ , de longueur L et de section S . Sa surface latérale est calorifugée, et ses sections d'abscisses $x = 0$ et $x = L$ sont respectivement mises en contact avec un thermostat de température T_1 et un thermostat de température T_2 .

On donne : pour un solide, $s(T)$ l'entropie massique ne dépend que de T avec $ds = c \frac{dT}{T}$.

1. (a) Déterminer la température dans la tige en régime permanent.
(b) Quel est alors le flux thermique transmis par la barre ?
2. On supprime brusquement les contacts avec les thermostats. L'évolution ultérieure de la tige est adiabatique.
(a) Déterminer la température d'équilibre de la tige.
(b) Calculer la variation d'entropie de la tige au cours de cette mise à l'équilibre.
(c) On pose $\frac{T_1}{T_2} = 1 + \epsilon$, avec $|\epsilon| \ll 1$. Discuter le signe de la variation d'entropie en fonction de ϵ .

8. Comportement social thermorégulateur

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carré de côté a et de hauteur ℓ . Le manchot, animal à sang chaud, maintient sa température interne T_i au moyen d'un apport métabolique qui compense les pertes par conduction thermiques au travers d'un revêtement de plumes d'épaisseur e et de conductivité λ , face à une température externe T_e .

1. Déterminer l'aire totale A_1 du parallélépipède.
2. Déterminer la valeur de la conductivité thermique λ du revêtement de plumes correspondant à un métabolisme $P_1 = 50\text{ W}$, pour une température intérieure $T_i = 37^\circ\text{C}$, une température extérieure $T_e = -20^\circ\text{C}$ (y compris au niveau du sol), une épaisseur $e = 1\text{ cm}$, un côté $a = 0,10\text{ m}$ et une hauteur $\ell = 0,50\text{ m}$.
3. Pour faire face à ces températures extrêmes, neuf manchots se serrent les uns contre les autres, formant un carré de 3×3 manchots. Le pavage est parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. De combien le métabolisme P_9 nécessaire au maintien de la température interne, rapporté à un manchot, est-il réduit lorsque les neuf manchots se serrent les uns contre les autres ?

9. Profil de température dans une boule d'uranium

Une boule d'uranium placée dans un grand volume d'eau est le siège de réactions nucléaire produisant une énergie thermique q par unité de volume et de temps. On donne : λ , la conductivité thermique du matériau constituant la boule, h le coefficient de transfert conducto-convectif au niveau de l'interface ; T_0 la température de l'eau loin de la sphère. Déterminer, en régime stationnaire, la répartition de température au sein de la boule.

Donnée – expression du laplacien en repère sphérique :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

10. Isolation d'une pièce et analogie électrique

- Rappeler l'expression de la résistance thermique pour un système à 1 D d'épaisseur e , de section S et de conductivité thermique λ .
- On étudie maintenant une paroi de température de surface T_{Paroi} , en contact avec un fluide de température T_i . On note h le coefficient d'échange conducto-convectif paroi-fluide. Montrer que pour une section S de paroi, on peut définir une résistance thermique R_{th} de conducto-convection.
- On étudie une pièce qui n'est pas parfaitement isolée. Il existe des pertes à travers le double vitrage associé aux quatre fenêtres de la pièce. Chaque double vitrage, de surface $S = 1,8 \text{ m}^2$ est constitué de deux vitres de conductivité thermique $\lambda_1 = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, de même surface S et d'épaisseur $e_1 = 2,5 \text{ mm}$. Entre les deux vitres se trouve une tranche d'air sec d'épaisseur $e_2 = 35 \text{ mm}$ et de conductivité $\lambda_2 = 23 \text{ mW.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Les coefficients d'échange entre la vitre et l'air de la pièce comme celui de l'autre vitre avec l'air extérieur valent $h = 9,3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. On néglige la résistance thermique d'échange (vitre) - (air sec entre les vitres). Calculer la résistance thermique de chaque fenêtre, puis de l'ensemble des quatre fenêtres.
- On considère l'air de la pièce, de capacité thermique C , de température variable T , évoluant de façon isochore et ne pouvant échanger de la chaleur qu'avec l'extérieur. Par un bilan énergétique, montrer que ce système est analogue à un "condensateur" thermique de capacité C .
- La température de la pièce étant de T_0 et celle de l'extérieur étant T_{ext} , on éteint le chauffage. Établir un modèle électrocinétique de type circuit RC que l'on représentera, analogue au système thermodynamique étudié et en déduire $T_p(t)$, température de la pièce en fonction du temps.

[1] 1. $T(-L_1 < x < 0) = T_0 + \frac{T_0 - T_1}{L_1} x$ et $T(0 < x < L_2) = T_0 + \frac{T_2 - T_0}{L_2} x$; 2. $T_0 = \frac{\frac{\lambda_1}{L_1} T_1 + \frac{\lambda_2}{L_2} T_2}{\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}}$; 3. $T_{0,\text{bois}} = 35^\circ\text{C}$ et $T_{0,\text{bois}} = 22^\circ\text{C}$.

[2] 1. Régime stationnaire sans production, $\Phi(r) = \text{cste} = 2\pi r j_{th}(r)$; $T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + T_2$; 2. Cours, $R_{th} = \frac{1}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$; 3. $R_{Cu} = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ K.W}^{-1}$, $R_{Laine} = 3,4 \text{ K.W}^{-1}$, $R_{Al} = 6,1 \cdot 10^{-6} \text{ K.W}^{-1}$, $T_{Cu/Laine} = 50^\circ\text{C}$ et $T_{Laine/Al} = 5^\circ\text{C}$.

[3] $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R} (T - T_f)$; $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_f}{2 \text{sh}(L/\delta)} (e^{(x/\delta)} - e^{(-x/\delta)}) + (T_1 - T_f) \left[e^{(-x/\delta)} - \frac{1}{\text{sh}(L/\delta)} e^{(x-L/\delta)} \right]$.

[4] 1. Cours, $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$; 2. $T(r) = T_i + \frac{T_i - T_e}{\ln(b/a)} \ln \frac{b}{a}$; 3. $\lambda = 387 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; 4. $R = 7,5 \cdot 10^5 \text{ K.W}^{-1}$.

[5] 1. $A = -\frac{1}{\lambda \sigma (\pi a^2)^2}$; 2. $C = \frac{I^2}{4\lambda \sigma \pi^2 a^4}$, $r = 0$; 3. a_M est proportionnel à I_M ; 4. a_M est proportionnel à $I_M^{2/3}$.

[6] 1. $\mathcal{P} = \frac{4}{3} R^3 p_V$; 2. $j_Q = p_V \frac{R^3}{3r^2}$; 3. $T_c = T_0 + \frac{P}{4\pi \lambda R}$; 4.

[7]

Résolution de problème

1. Survie en igloo

Quelle épaisseur e faut-il donner à un igloo pour survivre à l'intérieur ?

Données :

- $D = 4$ m diamètre intérieur de l'igloo,
- par son métabolisme, un être humain dégage une puissance de $P_0 = 50$ W,
- bien couvert, il survit à $T_{int} = 10^\circ\text{C}$,
- dehors, il fait $T_{ext} = -20^\circ\text{C}$,
- la conductivité thermique de la glace est $\lambda = 0,05 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.



Laplacien d'un champ scalaire en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

2. Café chaud

On considère une tasse de grès cylindrique remplie de café à la température $\theta_C = 80^\circ\text{C}$. Quelle doit être l'épaisseur du grès pour ne pas se brûler ?

Donnés :

- R le rayon intérieur de la tasse, $R = 3,5$ cm ;
- e l'épaisseur du grès ;
- λ conductivité thermique du grès, $\lambda = 1,8 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- h coefficient convectif à l'interface air-grès, $h = 50 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$;
- T_M température maximale acceptable $T_M = 50^\circ\text{C}$;
- T_a la température de l'air, $T_a = 20^\circ\text{C}$.

La loi de Newton pour les transferts conducto-convectifs :

$$\varphi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}})$$



BEOS 7867

3. Transpiration et vélo

On souhaite déterminer le volume d'eau nécessaire pour qu'un cycliste garde sa température corporelle constante à 37°C pendant son tour de 4 heures.

Données :

- $\mathcal{P}_{\text{meca}} = 330$ W ;
- Rendement des muscles : 33% en mécanique et 67% en thermique ;
- Capacité thermique du cycliste : $c_p = 3,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- Résistance thermique de la peau humaine pour un homme moyen : $R = 3 \cdot 10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$;
- Échange conducto-convectif entre l'air et le cycliste : $P_{cc} = hS(T_a - T_c)$ avec T_c température de surface du cycliste ; T_a : température de l'air $T_a = 25^\circ\text{C}$, $S = 2,0 \text{ m}^2$; $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.
- L'enthalpie massique de vaporisation de l'eau : $\Delta h_{vap} = 2300 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

BEOS 8722 - 2025