

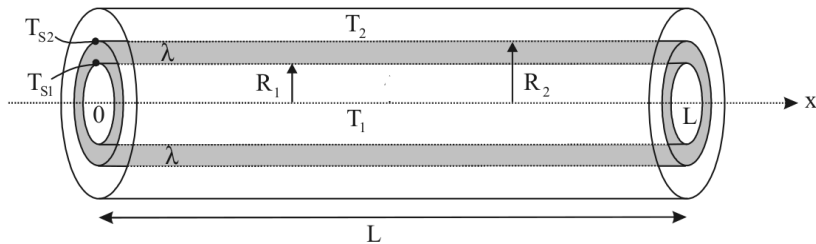
Étude d'un échangeur de chaleur à contre-courant

I Résistance conducto-convective.

On considère un cylindre creux constitué d'un matériau de conductivité thermique λ supposée indépendante de la température, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 (figure 3). Un fluide de température T_1 occupe l'intérieur de ce cylindre tandis qu'un fluide de température T_2 entoure l'extérieur du cylindre.

On note T_{S1} la température du cylindre sur sa surface intérieure et T_{S2} celle sur sa surface extérieure et on considère que la température au sein du matériau ne dépend que de la distance r par rapport à l'axe du cylindre. On néglige les effets de bord (comme si le cylindre était infiniment long selon l'axe des x) et on raisonne sur une longueur L de ce cylindre.

L'étude du système se fait en régime permanent.



1. Rappeler l'expression de la loi de Fourier en précisant la signification des différentes grandeurs.
2. Relier la puissance thermique Φ_{th} au vecteur densité de puissance $\vec{j}_{th}$. Que peut-on dire, en régime permanent, de la puissance thermique Φ_{th} traversant les surfaces latérales $2\pi R_1 L$, $2\pi r L$, et $2\pi R_2 L$? Justifier.
3. Établir la loi d'évolution de la température $T(r)$ au sein du matériau de conductivité thermique λ en fonction de la puissance thermique Φ_{th} .
4. En déduire la relation entre la puissance thermique Φ_{th} transférée de

l'intérieur vers l'extérieur du cylindre et la différence de température T_{S1} et T_{S2} .

5. Définir et donner l'expression de la résistance thermique conductivité thermique R_{Th} du cylindre de conductivité thermique λ .

Le transfert de chaleur entre un solide à la température T_S et un fluide à la température T_F se décrit en introduisant le coefficient de transfert convectif noté h_C : la puissance thermique transférée du solide vers le fluide à travers un élément de surface $d\Sigma$ est $d\Phi_{th} = h_C(T_S - T_F)d\Sigma$. On notera h_{C1} (respectivement h_{C2}) le coefficient de transfert convectif relatif au fluide de température T_1 (respectivement T_2).

6. Relier la puissance thermique Φ_{th} transférée en régime permanent du fluide intérieur au fluide extérieur aux différences de température $T_1 - T_{S1}$ et $T_{S2} - T_2$.

En déduire la relation entre Φ_{th} et $T_1 - T_2$. Montrer alors que l'expression de la résistance conducto-convective R_{CC} de l'ensemble est donnée par la relation :

$$R_{CC} = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{1}{R_1 h_{C1}} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{\lambda} + \frac{1}{R_2 h_{C2}} \right)$$

II Modélisation d'un échangeur de chaleur à contre-courant.

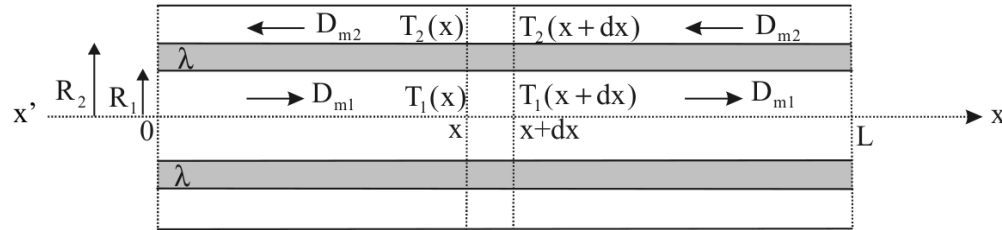
Un échangeur de chaleur à contre-courant est modélisé par deux cylindres coaxiaux à l'intérieur desquels circulent les fluides dans des sens opposés (figure 4). Le transfert de chaleur d'un fluide à l'autre se fait au travers du cylindre de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de conductivité thermique λ supposée indépendante de la température.

L'axe $x'x$ de l'échangeur est horizontal. On admettra que la température des fluides ne dépend que de l'abscisse x , que l'évolution des fluides est isobare et qu'il n'y a pas de variation d'énergie cinétique des fluides.

On notera D_{mi} le débit massique du fluide de température T_i et c_{pi} sa

capacité calorifique massique à pression constante.

Le fluide intérieur chaud n°1 entre dans l'échangeur à la température $T_1(0) = T_{e1}$ et en sort à la température $T_1(L) = T_{s1}$. Le fluide extérieur froid entre dans l'échangeur à la température $T_e(L) = T_{e2}$ et en sort à la température $T_2(0) = T_{s2}$.



1. En exprimant que la puissance thermique cédée par le fluide n°1 est celle reçue par le fluide n°2, établir une relation entre les variations de température $T_1(x) - T_1(0)$ et $T_2(x) - T_2(0)$
2. On note $d\Phi$ la puissance thermique élémentaire transférée du fluide n°1 au fluide n°2 à travers un élément de longueur dx de l'échangeur. En reprenant le résultat de la question A.6, montrer que $d\Phi = K(T_1(x) - T_2(x))dx$ et identifier le coefficient K .
Pour simplifier, on considérera pour la suite que $D_{m1}c_{p1} = D_{m2}c_{p2} = D_m c_P$.
3. En combinant les résultats des questions B.1. et B.2., établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température T_1 en fonction de x .
En déduire $T_1(x)$.
4. En déduire l'expression de $T_2(x)$.