

Devoir surveillé n°2

Samedi 10 octobre 2026

Durée : 4h00

- Vous devez vérifier que le sujet comprend 15 pages numérotées ;
- Vous êtes invités à porter une attention toute particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Toute réponse devra être justifiée et ce, même si l'énoncé ne le précise pas (sauf mention particulière).
- Vous devez établir une relation littérale avant d'effectuer toute application numérique (sauf mention particulière).
- Toute relation littérale présentant une erreur flagrante d'homogénéité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- Le téléphone portable est strictement interdit. Il doit être rangé éteint dans la boîte de la salle.

Le sujet est composé de 3 problèmes indépendants :

Partie I : Jean Perrin ;

Partie II : La Terre (piste bleue) **OU** - exclusif - L'or (piste rouge) ;

Partie III : Data center.

La calculatrice est autorisée sur les parties II et III

Première partie

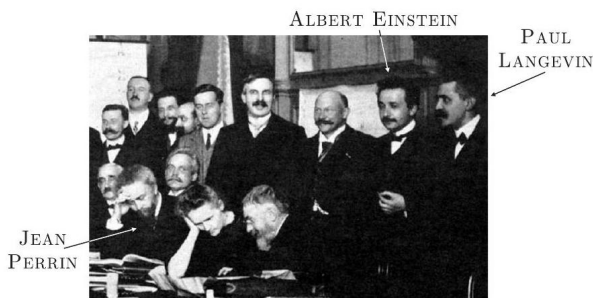
Jean Perrin et l'hypothèse atomique

Les études théoriques sur le mouvement brownien, proposées par Albert Einstein en 1905 et complétées par celles de Paul Langevin en 1908, ont été spectaculairement confirmées par une série d'une dizaine d'expériences réalisées entre 1907 et 1909 par Jean Perrin. Ces études sont les piliers de l'acceptation de l'existence des atomes par la communauté scientifique. Elles ont clos la « controverse atomiste » ouverte par les Grecs 6 siècles avant notre ère !

Après avoir pris connaissance des résultats de Perrin, en 1908, l'un des derniers farouches antiatomistes, Wilhelm Ostwald, déclare « *Je suis désormais convaincu que nous sommes entrés en possession de preuves expérimentales du caractère discret ou granulaire de la nature, que l'hypothèse atomique avait cherchées en vain depuis des millénaires* ».

Les expériences de Perrin et le modèle de Langevin reposent entièrement sur les modèles microscopiques de Ludwig Boltzmann, fondateur dans la seconde moitié du XIX^e siècle de la physique statistique. Les travaux expérimentaux de Perrin lui permirent notamment de mesurer la constante de Boltzmann k_B . En 1906, donc peu de temps avant la publication de ces travaux, Boltzmann se suicida, las des critiques et des attaques des disciples d'Ostwald...

En 1926, Perrin obtint le prix Nobel pour ses expériences !



Dans ce sujet, nous proposons de revenir sur quelques points de ce moment fameux de l'histoire de la physique en étudiant quelques aspects de la théorie de Langevin et de certaines des expériences réalisées par Perrin. Sur la photo ci-contre, prise lors du Congrès Solvay de 1911, on retrouve les trois acteurs de cette histoire, entourés de prestigieux collègues. Pour réaliser ses expériences, Jean Perrin utilise des grains de gomme-gutte.

Écoutons le décrire son procédé d'obtention de ses grains : « *La gomme-gutte, qu'on utilise pour l'aquarelle, provient de la dessiccation du latex. Un morceau de cette substance, frotté avec la main sous un mince filet d'eau distillée se dissout peu à peu en donnant une belle émulsion opaque d'un jaune vif, où le microscope révèle un fourmillement de grains jaunes de diverses tailles parfaitement sphériques. On peut calibrer ces grains jaunes et les séparer du liquide où ils baignent par une centrifugation énergique.* »

Dans tout ce problème, ces grains seront donc supposés identiques, de forme sphérique, de rayon $R_b = 0,2 \mu\text{m}$, de volume $V_b = 3,4 \times 10^{-20} \text{ m}^3$ et de masse volumique $\mu_b = 1,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On note $m_b = 4,1 \times 10^{-17} \text{ kg}$ la masse d'un grain. Dans ses expériences, Jean Perrin fabrique une émulsion en introduisant ces grains dans de l'eau légèrement sucrée. Ce liquide possède une masse volumique assimilable à celle de l'eau pure $\mu_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le peu de sucre dissous dans l'eau lui confère tout de même un caractère visqueux. De ce fait, l'eau exerce sur les grains en mouvement lent deux forces :

- la résultante des forces de pression, peu modifiée par rapport à une situation d'équilibre, est donnée par la loi d'Archimède : cette force $\vec{\Pi} = -\mu_e V_b \vec{g}$ est exactement opposée au poids du liquide déplacé par chaque grain ;
- la résultante des forces de frottement visqueux se traduit par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ où $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ désigne la vitesse des grains. La formule de Stokes précise que, pour un grain sphérique, $\alpha = 6\pi\eta R_b$ dans laquelle $\eta = 1,2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ représente le coefficient de viscosité dynamique de l'eau légèrement sucrée. Avec ces valeurs numériques, on trouve ici $\alpha = 4,5 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

En dehors de ces données, aucune connaissance relative à la viscosité n'est nécessaire à cette étude.

Ce problème est décomposé en 3 parties relativement indépendantes : la partie **I** est consacrée au modèle du gaz parfait ; la partie **II** est dédiée aux expériences de sédimentation pratiquées sur les émulsions ; la partie **III** présente le modèle théorique du mouvement brownien de Langevin complété par les expériences de diffusion de

Perrin.

Dans ce qui suit on utilisera la fonction $A(z) = \exp(-z/H)$. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche $\vec{f}$, sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. La valeur moyenne temporelle d'une fonction $\varphi(t)$ sera notée $\langle \varphi \rangle$. Toute réponse, même qualitative, se doit d'être justifiée.

Les affirmations, même justes, mais non justifiées ne seront pas prises en compte.

I - Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

On considère un gaz parfait constitué de molécules identiques, de masse molaire $M = 30 \text{ g.mol}^{-1}$, en équilibre thermique à la température ambiante T_0 . Le gaz, soumis à la pesanteur, est au repos dans un récipient de volume V , de hauteur h de l'ordre de quelques mètres, et de section $S = 1 \text{ m}^2$. L'encombrement caractéristique d'une molécule constituant ce gaz est une sphère de rayon R_m de l'ordre de la centaine de picomètres.

On rappelle les valeurs de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, de la constante de Boltzmann, $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, de la constante d'Avogadro, $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ et éventuellement de leur produit $R = k_B N_A = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1. En précisant les valeurs choisies de température T_0 et de pression (supposée provisoirement uniforme) P_0 , estimer le volume molaire du gaz. En déduire une estimation du rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associé aux molécules et le volume du récipient.
2. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Les ordres de grandeur établis à la question précédente justifient-ils d'adopter ce modèle dans la suite ?
3. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_{cm} et de l'énergie potentielle E_{pm} d'une particule de masse m_m de ce gaz. Pourquoi observe-t-on qu'à température ambiante ces molécules ne se regroupent pas au fond du récipient ?

La loi de la statique des fluides montre que, sous l'action de la pesanteur, la pression $P(z)$ n'est pas uniforme verticalement et dépend de l'altitude z .

4. En déduire que la masse volumique ρ du gaz dépend aussi de z et l'exprimer en fonction de $P(z)$. Écrire la condition d'équilibre mécanique pour une tranche de gaz comprise entre les altitudes z et $z + dz$ pour laquelle on supposera l'équilibre thermodynamique local réalisé. En déduire une équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
5. En notant $P_0 = P(z = 0)$, montrer que $\frac{P(z)}{P_0}$ s'exprime simplement grâce à la fonction $A(z)$. Exprimer la distance caractéristique H en fonction de k_B, g, T_0 et m_m . Calculer la valeur numérique de H . La variation de pression est-elle détectable, avec un manomètre usuel, dans le récipient considéré ? En serait-il de même si le récipient était rempli d'eau liquide ?
6. Préciser la fonction $E(z)$ telle que $A(z) = \exp\left[-\frac{E(z)}{k_B T_0}\right]$. Que représente la fonction $E(z)$? Interpréter physiquement cette expression dont la généralisation est due à Boltzmann.
7. Montrer que la concentration $c_g(z)$ du gaz, rapport du nombre de moles sur le volume, suit une loi du même type, et qu'on peut écrire $c_g(z) = c_{g_0} A(z)$, où c_{g_0} représente la concentration au niveau du sol ($z = 0$) dont on précisera l'expression.

II - Étude d'un équilibre de sédimentation

Dans une première expérience, Jean Perrin lâche, sans vitesse initiale, à la surface d'un récipient, un grand nombre ($N = 13000$) de grains dans de l'eau légèrement sucrée. Le récipient a une section S et une hauteur h_1 suffisante pour être considérée comme infinie.

8. Faire le bilan des forces exercées sur un des grains lors de sa chute dans l'eau sucrée.
9. On note $\vec{v}(t) = -v(t)\hat{e}_z$ la vitesse de chute du grain, $\hat{e}_z$ étant l'axe vertical ascendant, et $v(t) > 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ puis donner sa solution.
Montrer qu'une fois le régime permanent établi, les grains possèdent une vitesse limite $v_\ell = m^*g/\alpha$.
Exprimer le paramètre m^* en fonction de V_b et des masses volumiques μ_b et μ_e . Justifier qu'on nomme cette quantité « masse apparente ».
Exprimer la durée caractéristique τ du régime transitoire en fonction de m_b et α . Evaluer un ordre de grandeur de v_ℓ et de τ .

Même au bout d'une longue durée, les grains ne se tassent pas au fond du récipient. On observe un phénomène de sédimentation : les grains se répartissent sur l'ensemble de la hauteur et la densité de grains, notée $c(z)$ et exprimée en m^{-3} , n'est pas uniforme.

Afin d'interpréter ce phénomène, on introduit deux vecteurs, appelés « densité de flux de particules » et qui s'expriment dans les mêmes unités mais par des lois distinctes :

- Un premier vecteur densité de flux, $\vec{j}_c$, est associé au mouvement de chute des grains. Il est à l'origine d'un phénomène de convection et défini par la relation $\vec{j}_c(z) = -c(z)v_\ell\hat{e}_z$;
 - Un deuxième vecteur densité de flux est associé au gradient de densité, ici sur l'axe z . L'inhomogénéité crée un courant de particules dont l'expression est donnée par la loi de Fick qui s'écrit ici $\vec{j}_n(z) = -\frac{dc}{dz}D\hat{e}_z$. Le coefficient D se nomme coefficient de diffusion. Il dépend de la nature du milieu et des particules étudiées. Aucune connaissance relative à la loi de FICK n'est nécessaire à l'étude du problème.
10. Donner les unités (ou dimensions) communes aux vecteurs $\vec{j}_c$ et $\vec{j}_n$, ainsi que l'unité de D . À l'état d'équilibre macroscopique, caractérisé par une température uniforme T_0 et une répartition de concentration $c(z)$ indépendante du temps, quelle est la relation entre $\vec{j}_c$ et $\vec{j}_n$? En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $c(z)$.
En posant $c(z=0) = c_0$, exprimer $c(z)$ en fonction de $A(z)$, on déterminera la distance caractéristique H_b apparaissant dans $A(z)$ en fonction de R_b, D, η, m^* , et g .
 11. Compte tenu des forces conservatives s'exerçant sur un grain, quelle est l'expression de l'énergie potentielle $E_p^*(z)$ correspondant au poids de la masse apparente m^* du grain à l'altitude z ? En déduire l'expression de D en fonction de k_B, T_0, η et R_b permettant d'écrire $A(z) = \exp\left[-\frac{E_p^*(z)}{k_B T_0}\right]$.
 12. Sachant que le nombre N de grains est conservé sur la hauteur h_1 du récipient, suffisamment grande pour être supposée infinie, exprimer la concentration c_0 en fonction de N , de la section S , et de la distance caractéristique H_b .

Une fois la température de l'émulsion stabilisée à une valeur uniforme $T_0 = 20^\circ\text{C}$, Jean Perrin a compté le nombre moyen $n(z)$ de grains dans des petites tranches régulièrement réparties en hauteur et d'épaisseur e constante. Il publie les résultats que nous avons synthétisés sur la figure 1 (Annales de Chimie et de Physique, Mouvement brownien et réalité moléculaire, 8^e série, sept. 1909).

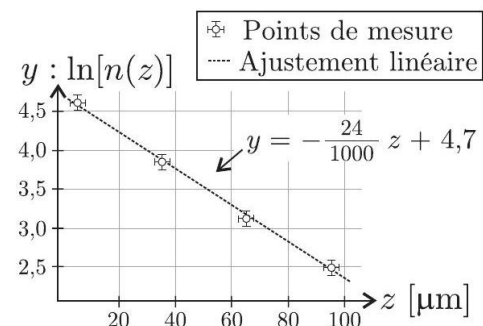


Figure 1 - Sédimentation de grains

13. En exprimant $c(z)$ en fonction de $n(z)$, déduire de ces données une estimation de la hauteur caractéristique H_b associée ici au phénomène. La hauteur du récipient utilisé par Jean Perrin, $h_1 = 100 \mu\text{m}$, était-elle suffisante ?
14. Estimer la valeur de k_B qu'a pu déduire Jean Perrin de cette expérience. Identifier des causes d'erreurs expérimentales.

III - Le modèle de Langevin

En 1828, le botaniste Robert Brown publie un article dans lequel il décrit le mouvement erratique de grains de pollen dans l'eau observés au microscope. Ce type de mouvement était apparemment connu depuis l'invention du microscope (fin XVI^e - début XVII^e siècle). Le mérite de Brown est d'en faire une étude systématique avec des grains de pollen, de suie, de poussière, de roches pulvérisées et même d'un fragment du Sphinx. Ce dernier cas était destiné à éliminer l'hypothèse vitaliste qui prévalait et attribuait ce mouvement à des propriétés organiques propres aux particules. En 1888, le physicien français Louis-Georges Gouy résume les observations sur ce mouvement, appelé depuis brownien :

- le mouvement est extrêmement irrégulier et ne semble pas avoir de tangente ;
- deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants ;
- le mouvement est d'autant plus actif que la particule est petite, que le fluide est moins visqueux ou la température est élevée ;
- la nature et la densité des particules n'ont pas d'influence sur le mouvement qui de plus ne s'arrête jamais !

Pour interpréter les expériences de Brown, on étudie le mouvement unidimensionnel - le long d'un axe $(O, \hat{e}_x)$ - des mêmes grains sphériques que ceux étudiés dans la partie **II** (masse m_b , rayon R_b). Ces grains sont plongés dans le même liquide sucré que celui utilisé dans l'expérience de Jean Perrin, en équilibre thermique à la température T_0 , mobiles sous l'effet de l'agitation thermique. Ce modèle unidimensionnel peut éventuellement se généraliser à trois dimensions.

On note $\vec{x} = x(t)\hat{e}_x$ la position et $\vec{v} = v(t)\hat{e}_x$ la vitesse d'un grain. A $t = 0$, le grain étudié est en O . Le mouvement ne s'arrêtant jamais, en 1908, Paul Langevin propose l'idée qu'il existe des chocs à l'échelle microscopique qui entretiennent cette agitation. Il introduit une force qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide sur les grains. Cette force $\ll$ indifféremment positive ou négative, dont le but est de maintenir l'agitation microscopique $\gg$ est notée $\vec{F}_c = F_c \hat{e}_x$. En des termes moins prosaïques, cela revient à faire l'hypothèse que la moyenne temporelle du produit $\vec{x} \cdot \vec{F}_c$ est nulle, soit $\langle x F_c \rangle = 0$. Dans son modèle, Langevin néglige tous les effets de la pesanteur mais tient compte de la résultante des forces de frottement visqueux.

15. Écrire l'équation, notée (E_L) , vérifiée par $\vec{v}$ en tenant compte de la force $\vec{F}_c$. Montrer qu'en l'absence de la force $\vec{F}_c$, le mouvement s'atténue très vite.
16. Écrire le produit $x \frac{dv}{dt}$ en fonction de $\frac{d(xv)}{dt}$ et v^2 .
17. Donner la définition de la vitesse quadratique moyenne, notée u . Dans le cas particulier de notre étude on montre que $m_b u^2 = k_B T_0$, commenter ce résultat.

Le point délicat de la théorie de Langevin revient à considérer que la fonction $\varphi = \langle xv \rangle$, qu'il calcule comme une moyenne temporelle, peut néanmoins être considérée comme une fonction du temps $\varphi = \varphi(t)$, nous ferons cette hypothèse, dite ergodique, qui permet d'écrire ici $\left\langle \frac{d(xv)}{dt} \right\rangle = \frac{d\varphi}{dt}$ ou même $\left\langle \frac{d(x^2)}{dt} \right\rangle = \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt}$. L'étude de l'hypothèse ergodique alimente depuis de nombreux travaux théoriques tant physiques que mathématiques.

18. En partant de l'équation (E_L) , obtenir une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par la fonction $\varphi(t)$. En supposant que $\varphi(0) = 0$, en déduire l'expression de $\varphi(t)$ en fonction de t, k_B, T_0, m_b et α .
19. En utilisant l'hypothèse ergodique, déterminer la relation entre $\varphi(t)$ et $\psi(t) = \langle x^2 \rangle$. Après avoir obtenu l'expression générale de $\psi(t)$, montrer que les ordres de grandeur de ce problème permettent d'écrire $\psi(t) \simeq D_x t$ où l'on précisera l'expression de la constante D_x en fonction de T_0, k_B et α .

Deuxième partie

Piste bleue : Quelques propriétés thermodynamiques de la Terre

La vie de tous les êtres vivants dépend de la température sur la Terre et celle-ci relève de son bilan énergétique. Une variation moyenne de la température de 1,5 K peut entraîner des conséquences importantes pour l'humanité.

I Mesure de la conductivité thermique d'une roche terrestre

On considère le dispositif représenté en **figure 1**. Des thermocouples permettent de mesurer les différentes températures. On note T_c et T_f les températures imposées grâce à des courants d'eau chaude et froide respectivement ; T_1 et T_2 sont les températures aux interfaces entre le laiton et les contacts 1 et 2 respectivement. On note d et ℓ les longueurs respectives de l'échantillon de roche et de celui du laiton (alliage métallique). Les « contacts » entre la roche et le laiton, par de l'air par exemple, mettent en jeu des résistances thermiques inconnues, sur des épaisseurs e_1 et e_2 . Enfin, on note par λ_ℓ , λ , λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques du laiton, de la roche et des contacts 1 et 2. On admet qu'avec ce dispositif la température ne dépend que de la variable z .

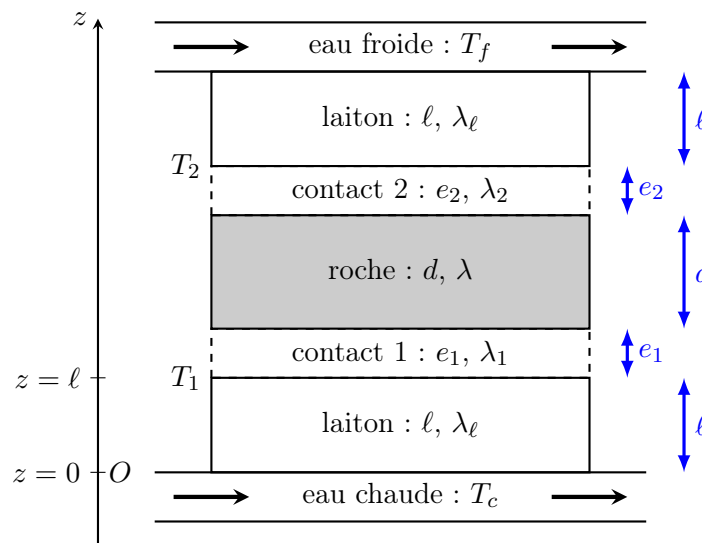


FIGURE 1 – Dispositif de mesure de la conductivité thermique d'une roche

Q1. Donner la définition et l'expression de la résistance thermique R_{th} d'un conducteur thermique de conductivité λ , de section s et de longueur ℓ traversé par un flux thermique uniforme perpendiculaire à la section.

Q2. Établir alors, la relation $\frac{T_1 - T_2}{T_c - T_f} = \frac{\lambda_\ell}{\ell} \left(\frac{d}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$. Expliquer comment on peut déterminer λ expérimentalement, en s'affranchissant des indéterminations dues aux contacts.

II Évolution de la température à l'intérieur de la Terre

Le manteau terrestre, de masse volumique moyenne $\mu = 4,5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, occupe 84 % du volume total de la Terre.

On s'intéresse à la puissance calorifique volumique p_v générée par la radioactivité d'éléments contenus dans

les roches du manteau. La puissance générée par cette radioactivité est estimée à $P = 1,2 \times 10^{13} \text{ W}$. Les principaux éléments radioactifs à prendre en compte sont l'uranium U, le thorium Th et le potassium K dont les désintégrations radioactives produisent une quantité d'énergie spécifique convertie en chaleur.

On attribue les indices $i = 1, 2$ et 3 respectivement aux éléments uranium U, thorium Th et potassium K. Pour chacun des noyaux ${}^{A_i}X_i$, on note M_i, x_i, τ_i et ε_i respectivement la masse molaire, la fraction massique dans la roche (valeur du rapport de la masse de l'isotope par la masse de roche qui la contient), la demi-vie et l'énergie spécifique libérée par atome. La demi-vie τ_i (ou « période ») correspond à la durée au cours de laquelle le nombre de noyaux est réduit de moitié.

Les valeurs sont données dans le **tableau 1**.

Noyau ${}^{A_i}X_i$	${}^{238}_{92}\text{U}$	${}^{232}_{90}\text{Th}$	${}^{40}_{19}\text{K}$
Masse molaire (en g mol^{-1})	238	232	40
Fraction massique x_i de l'isotope	1.3×10^{-8}	4.0×10^{-8}	1.9×10^{-8}
Demi-vie τ_i (en 10^9 ans)	4.46	14.0	1.26
Énergie thermique dégagée ε_i (en J par noyau) par l'isotope	7.41×10^{-12}	6.24×10^{-12}	1.14×10^{-13}

TABLE 1 – Production d'énergie par la radioactivité au sein de la Terre

On note N_i le nombre de noyaux par unité de volume de roche ; lors de la désintégration des noyaux, le taux de variation du nombre N_i est de la forme :

$$\frac{dN_i}{dt} = -\frac{\ln 2}{\tau_i} N_i.$$

Q3. Déterminer l'expression $N_i(t)$ en notant N_{i0} sa valeur à l'origine des temps.

Q4. Exprimer la puissance volumique $p_{v,i}(t)$ pour l'élément X_i dégagée par radioactivité dans les roches, en fonction des données utiles. En déduire la puissance totale $p_v(t)$ dégagée par les trois éléments radioactifs.

Q5. Le graphe de la **figure 2** schématise l'évolution de la puissance volumique avec le temps. Reproduire l'allure de ce graphe sur votre copie et en déduire, avec justification, la date $t_{1/2}$ à laquelle la puissance volumique sera réduite de moitié.

La Terre sphérique, de rayon $R_T = 6400 \text{ km}$, est supposée homogène et caractérisée par les valeurs uniformes de sa masse volumique μ , sa capacité thermique massique C et sa conductivité thermique λ , de valeur approximative $\lambda \approx 3 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}$ est radial. On pose $\vec{j}(M, t) = j(r, t) \vec{u}_r$.

On se propose d'établir l'expression donnant les variations de la température $T(M, t)$ dans la Terre.

Q6. On se place d'abord en régime variable et on prend comme système la coquille sphérique d'épaisseur dr , comprise entre les rayons r et $r + dr$. Pendant la durée élémentaire dt , la température de ce système varie de dT . Expliciter le raisonnement qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\mu C 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial t} dt dr = -d(j 4\pi r^2) dt + p'_v 4\pi r^2 dr dt.$$

Donner la signification physique de chacun de ces trois termes.

On néglige la variation temporelle de la température dans la question 7.

Q7.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$.

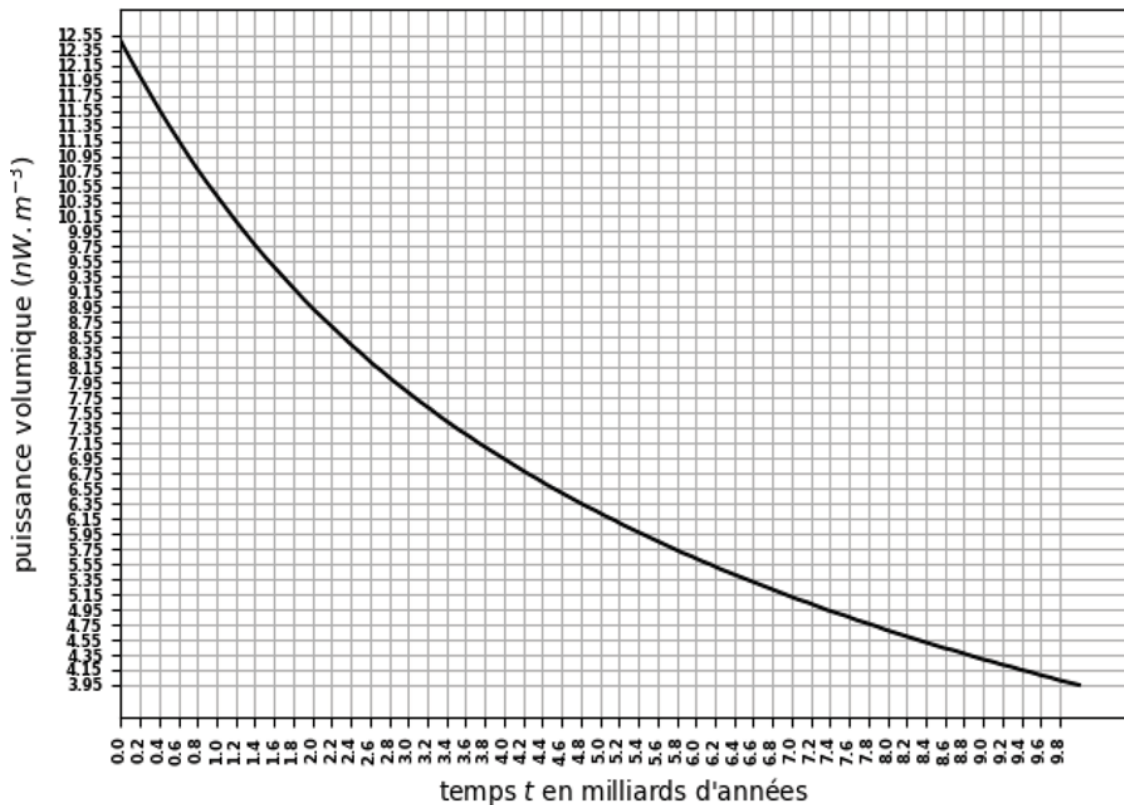


FIGURE 2 – Évolution de la puissance volumique, d'origine radioactive, avec le temps

- Déterminer la loi de variation spatiale de la température $T(r)$ dans la Terre en supposant que la température est finie au centre de celle-ci et que la puissance volumique p'_v est uniforme dans tout le volume de la Terre. La température du sol vaut $T_s = 298 \text{ K}$.
- Déterminer l'expression de la puissance surfacique $j(r)$.
- On donne la puissance surfacique à la surface de la Terre $j(R_T) = 70 \text{ mW m}^{-2}$. En déduire la valeur de p'_v . Commenter compte tenu de 5.

III Estimation de l'âge de la Terre par Lord Kelvin

On néglige la sphéricité de la planète et on admet que le seul mécanisme énergétique dans le sol est le transfert thermique diffusif. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z comptée positivement et du temps t .

On prendra les valeurs numériques suivantes

- masse volumique $\mu = 2,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité thermique massique $c_p = 1 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
- conductivité thermique $\lambda = 4 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$

La température est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où $D = \frac{\lambda}{\mu c_p}$ est une constante.

Q8. Soit j_Q la densité de courant thermique ; établir l'équation aux dérivées partielles dont elle est solution.

Q9. Au milieu du XIX^{ème} siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément, sa surface a été soumise à une température T_s . Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de

la Terre. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers $+\infty$? Quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers $+\infty$?

Q11. La solution proposée par Lord Kelvin :

$$j_Q(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right),$$

où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est-elle satisfaisante? Représenter graphiquement la valeur absolue de la densité de flux thermique, en fonction de la profondeur pour deux dates différentes.

Q12. Les paramètres du problème sont $T_0 - T_S$, λ , ρ et c_p . On suppose que

$$A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \mu^\gamma c_p^\delta$$

où a , α , β , γ et δ sont des constantes sans dimensions. Calculer α , β , γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.

Q13. Par un raisonnement que l'on ne cherchera pas à reproduire, on peut montrer que $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre.

Q14. Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K; l'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquant un gradient thermique proche de 30 K.km^{-1} , quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle?

Deuxième partie

Piste rouge : Imagerie des nanoparticules d'or

Les nanoparticules sont trop petites pour être visualisées avec un microscope. Des techniques d'imagerie indirecte sont donc développées pour les détecter.

Une équipe de l'université Bordeaux 1 a mis au point il y a une quinzaine d'années une technique de microscopie photothermique qui permet de détecter et de localiser, dans un échantillon, des particules d'or dont le rayon n'excède pas quelques nanomètres. Une étape de ce protocole consiste à chauffer la particule par un faisceau laser et fait l'objet de cette partie.

On considère une sphère d'or, de rayon $a = 10$ nm, immobilisée dans un gel constitué très majoritairement d'eau, et chauffée par un faisceau laser.

Le milieu (le gel) entourant la sphère est considéré comme homogène, infini et initialement à la température T_0 . On note κ la conductivité thermique du milieu et C_g sa capacité thermique volumique. On supposera que, dans le domaine de températures exploré, ces grandeurs sont indépendantes de la température.

On note $P_{\text{abs}}(t)$ la puissance totale absorbée par la sphère et C_{Au} la capacité thermique volumique de l'or.

Compte tenu de la taille de la nanosphère, on admet que sa température est partout égale à sa température de surface, que l'on note $T_s(t)$.

On suppose que le contact thermique entre le gel et la nanoparticule est parfait donc que $T(a^+, t) = T_s(t)$.

I Équation de la diffusion thermique en géométrie sphérique

- Q1. Montrer, à l'aide d'un argument simple, que la température T en un point du milieu ne dépend spatialement que de r , distance séparant le centre de la nanosphère du point considéré.
- Q2. Effectuer un bilan énergétique entre t et $t + dt$ pour le système "coquille sphérique" comprise entre les sphères de rayon r et $r + dr$ et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(r, t)$ dans le milieu :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) (r, t).$$

Cette équation se met sous la forme (le calcul n'est pas demandé) :

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t}(r, t) = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} (r, t).$$

II Température dans le milieu en régime stationnaire

On se place en régime stationnaire, c'est-à-dire que les températures de la sphère et du milieu ne dépendent pas du temps.

- Q3. Établir l'expression de la température $T(r)$ dans le milieu en fonction de a , r , T_0 et T_s .
- Q4. En déduire l'expression de la puissance fournie par la nanosphère au milieu extérieur, $P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}}$, en fonction de a , κ et $\delta T_s = T_s - T_0$ sous la forme :

$$P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}} = 4\pi a \kappa \delta T_s.$$

III Température de surface de la nanosphère

On suppose maintenant que l'intensité du faisceau laser chauffant la nanosphère d'or est modulée sinusoïdalement, la puissance absorbée par la sphère étant donnée par :

$$P_{\text{abs}}(t) = P_0(1 + \cos(\Omega t)),$$

où P_0 est une constante positive. On admet que l'expression de $P_{\text{sph} \rightarrow \text{milieu}}$ établie à la question 4 est valable même en régime variable.

- Q5. En effectuant un bilan énergétique pour la nanosphère entre t et $t + dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par $\delta T_s(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\delta T_s(t) + \tau \frac{d(\delta T_s)}{dt} = \frac{P_{\text{abs}}(t)}{4\pi\kappa a},$$

où τ est une constante dont on donnera l'expression en fonction des données du problème et dont on vérifiera qu'elle est bien homogène à un temps.

On donne $P_0 = 0,375 \mu\text{W}$ et $\frac{\Omega}{2\pi} = 700 \text{ kHz}$.

- Q6. Justifier que la température $T_s(t)$ se met sous la forme approchée :

$$T_s(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi\kappa a}(1 + \cos(\Omega t)).$$

- Q7. Donner l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T_s}$ de la température de la surface de la sphère et calculer sa valeur.

IV Température du gel autour de la sphère

On admet que la solution de l'équation de la diffusion thermique dans le gel s'écrit :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\alpha}{r} \left(1 + \exp\left(-\frac{r-a}{r_{th}}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{th}}\right) \right),$$

où α est une constante réelle et $r_{th} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega C_g}}$.

- Q8. Question pour les 5/2 – Interpréter physiquement la constante r_{th} et citer un autre domaine de la physique où l'on rencontre une situation similaire.
- Q9. Établir l'expression de la constante α en fonction de P_0 et κ .
- Q10. En considérant que $\alpha \ll r_{th}$, déterminer l'expression de l'élévation moyenne $\overline{\delta T} = \langle T(r, t) - T_0 \rangle$ de la température du milieu contenu dans une sphère de rayon r_{th} autour de la nanoparticule, la moyenne étant effectuée sur le temps puis sur le volume de la sphère de rayon r_{th} . L'exprimer en fonction de a , r_{th} et de $\overline{\delta T_s}$ (voir question ?). Évaluer numériquement $\overline{\delta T}$.
- Q11. Proposer une technique permettant de révéler les variations faibles de l'indice optique du gel induites par cette variation de température.

Données :

Conductivité thermique du gel	$\kappa = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Capacité thermique volumique	$C_g = 4,2 \times 10^6 \text{ J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$
Capacité thermique volumique	$C_{\text{Au}} = 2,5 \times 10^6 \text{ J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$
Volume d'une sphère de rayon R	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Surface d'une sphère de rayon R	$S = 4\pi R^2$

Troisième partie

Refroidir des centres de données

Un centre de données - data center en anglais - est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (data). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

I À l'échelle des composants

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe (Ox) , de rayon a , de longueur $b \gg a$ et de conductivité thermique λ . Elle est accolée en $x = 0$ au composant de température T_d ; le contact thermique en $x = 0$ est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température T_a uniforme.

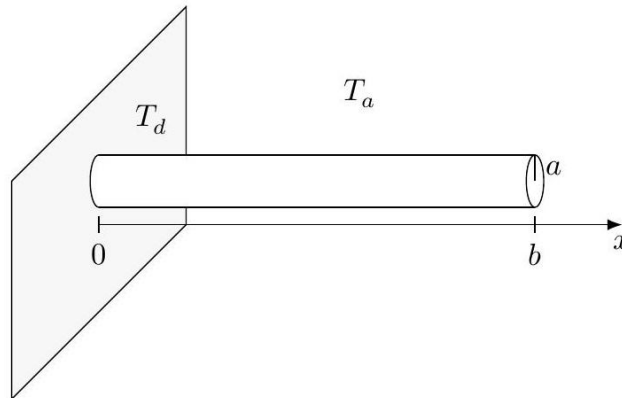


Figure 1 Modélisation de l'ailette

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température $T(x)$ est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse x pour tout $x \in [0, b]$.

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme T_a , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc}(x) = h (T(x) - T_a) \vec{n}$$

où $\vec{j}_{cc}$ correspond à la densité de flux conducto-convectif et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient h , dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fin d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$. Sur la figure 2 est représentée la solution « normalisée » de l'équation (I.1), définie par $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$, en fonction de l'abscisse adimensionnée x/b , pour différentes valeurs du rapport b/δ .

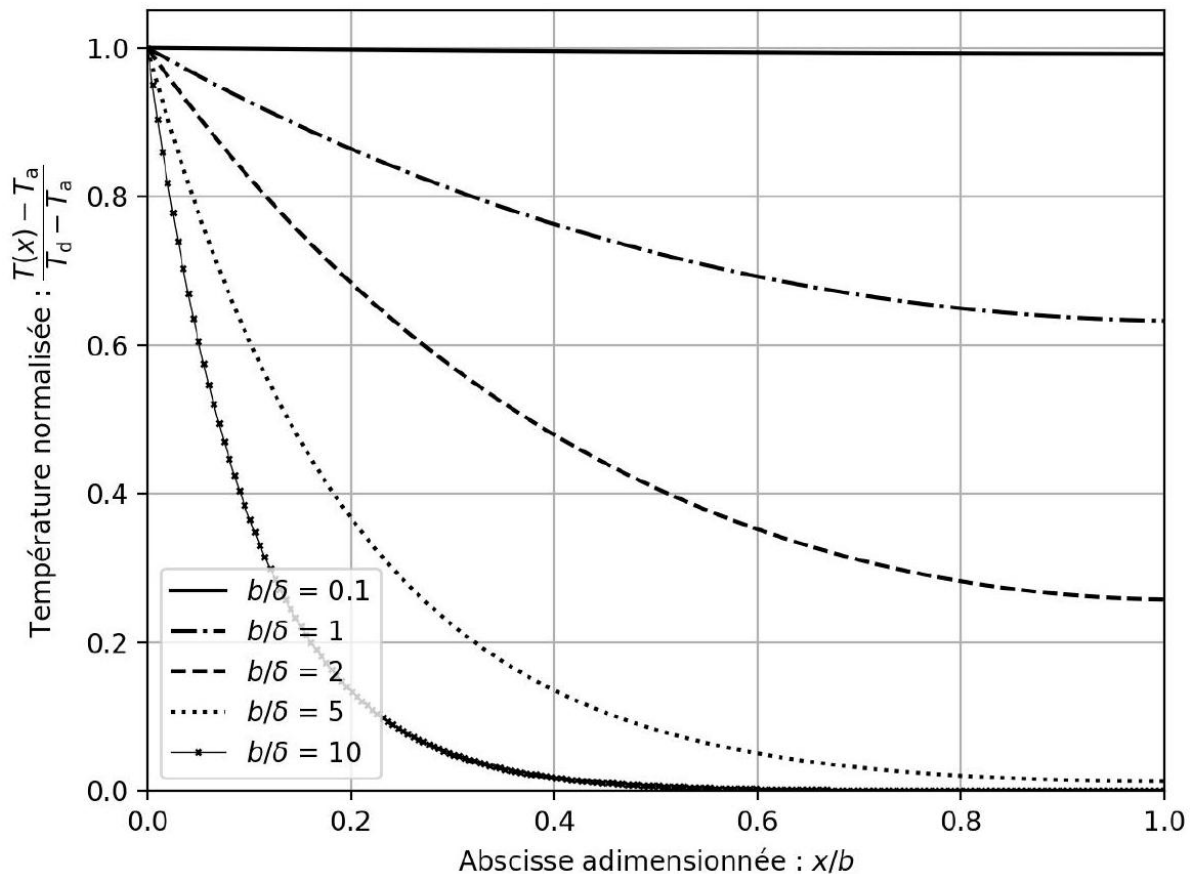


Figure 2 Représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium (solution de l'équation (I.1)) pour différentes valeurs du rapport b/δ

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

On définit la résistance thermique R_{th} de l'ailette de refroidissement par $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2$ cm. En vous

appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1$ mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par 60°C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

II À l'échelle des locaux

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse au système de refroidissement d'une salle informatique de 25 m^3 , située dans le sud de la France, dans laquelle sont placés plusieurs serveurs de données. L'objectif est de maintenir la température de la salle à une valeur inférieure ou égale à $T_{\text{max}} = 35^\circ\text{C}$, sachant que les serveurs de données dégagent une énergie thermique de $100\text{ kW} \cdot \text{h}$ chaque jour.

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité - ou COP (Coefficient de Performance) - est égale à 3.

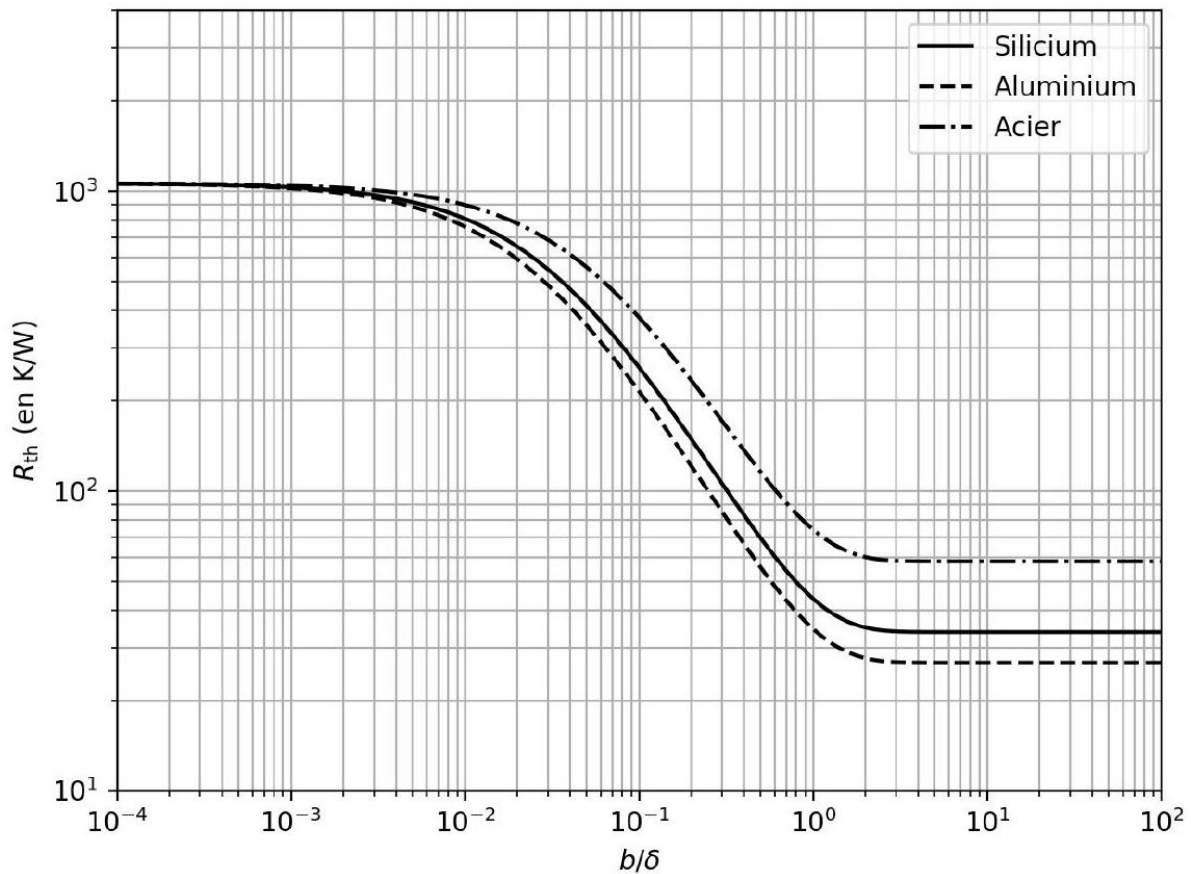


Figure 3 Évolution de la résistance thermique d'une ailette de rayon $a = 1$ mm, en présence de ventilation, en fonction du rapport b/δ

Afin de réduire les dépenses engagées pour le refroidissement de la salle, une alternative intéressante est celle du free-cooling, qui consiste à ventiler la salle tout en exploitant la fraîcheur de l'air extérieur. Pour ce faire, on a recours à l'installation d'un ventilateur pouvant remplacer l'air de la pièce avec le débit de volume $D_v = 830\text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. La puissance absorbée par le ventilateur est $\mathcal{P}_v = 60\text{ W}$.

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température T_{max} . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m , en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions. Les relevés annuels de température à l'extérieur de la salle sont présentés sur la figure 4.

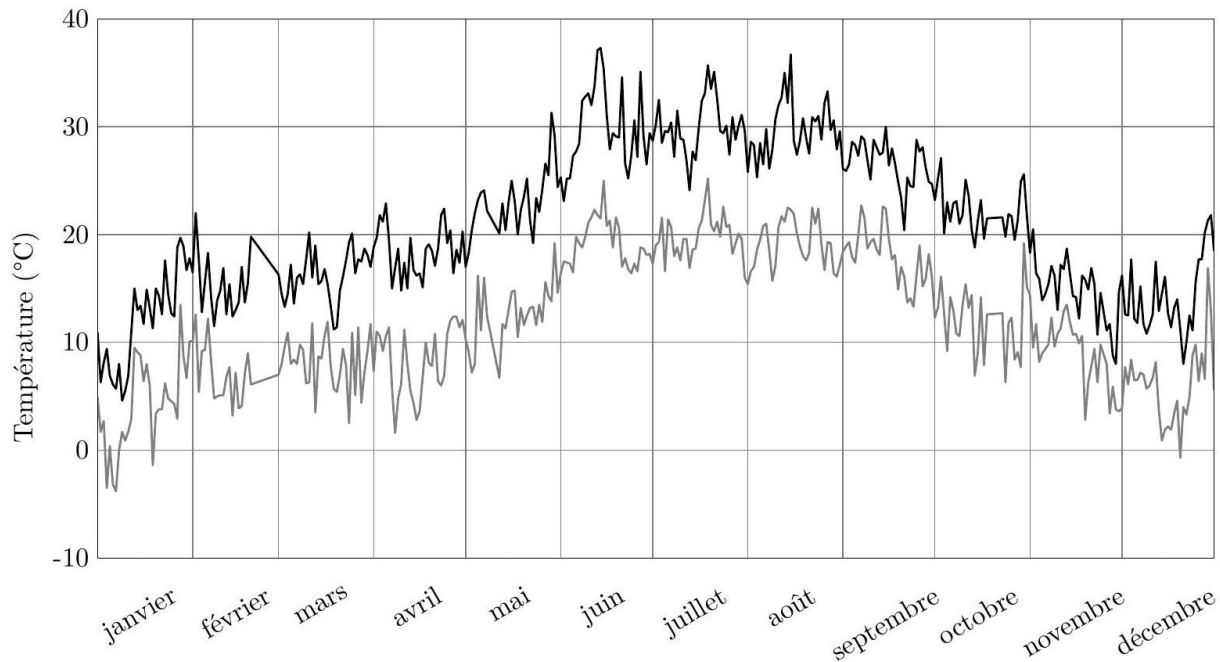


Figure 4 Relevé des températures journalières minimales et maximales à l'extérieur de la salle pour l'année 2021 (source infoclimat.fr)

Lorsque le système de free-cooling ne permet pas de maintenir la température de la salle à une température inférieure ou égale à $T_{\max}$, le système de conditionnement d'air prend le relais et le système de free-cooling s'arrête.

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de free-cooling est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de free-cooling dans cette salle informatique.

Données

Conductivité thermique du silicium	$\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'aluminium	$\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'acier	$\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique)	$h_s = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé)	$h_r = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Prix du kW.h	0,17 euro

Formulaire

Soit deux fonctions sinusoïdales f et g , scalaires ou vectorielles, de même période et d'écritures complexes respectives $\underline{f}$ et $\underline{g}$. La valeur moyenne de la fonction $f \times g$, le symbole $\times$ signifiant une opération de produit (scalaire ou vectoriel), vérifie la relation

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

où Re désigne la partie réelle et $\underline{g}^*$ le conjugué de la fonction complexe $\underline{g}$.