



Partie A – Diffusion thermique

I - Le programme

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Tableaux	
Tableaux à une ou deux dimensions.	Choisir une structure de données appropriée à la modélisation d'un problème physique. Réaliser des opérations algébriques simples sur des tableaux. Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque numpy (leurs spécifications étant fournies) pour manipuler des tableaux.
2. Équations différentielles et équations aux dérivées partielles	
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.
Contenu thématique	Capacité numérique
Équation de la diffusion thermique.	Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires..

II - Les outils python

1 - Les bibliothèques à importer

- numpy
pour créer des tableaux.
- matplotlib.pyplot
pour les représentations graphiques.

2 - Les commandes utiles

Création de tableaux :

- À partir d'une liste. **np.array([liste])** : crée un tableau à partir d'une liste.
- À partir d'un intervalle et d'un nombre d'éléments : **np.linspace(start, end, nbre)** , génère n valeurs entre start et end.
- À partir d'un intervalle et d'un pas : **np.arange(start, end, pas)**, génère des valeurs entre start et end (exclus) espacées du pas.
- Tableau de zéros : **np.zeros(dim)** crée un tableau de 0 de dimension dim.

Boucle **for** avec la fonction **range()** :

La fonction range() permet de générer une liste de parcours.

- **range(n)** renvoie un itérateur de 0 à n-1.
- **range(a,b)** renvoie un itérateur avec *a* comme premier entier et b-1 comme dernier entier.
- **range(a,b,pas)** renvoie un l'entier *a* puis des les entiers avec un intervalle *pas* jusqu'à *b* exclus.

Pour tracer des courbes :

plt.plot(x,y) pour créer le graphique

plt.show() pour afficher le graphique

III - Problème étudié

1 - Équation de diffusion

Nous étudions la diffusion thermique dans un barreau droit isolé latéralement, de section S et de longueur L . En l'absence de terme de source, l'équation de diffusion thermique dans le barreau a pour expression :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

où $T(M, t) = T(x, t)$ est le champ de température du barreau et $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ coefficient de diffusivité thermique.

2 - Les conditions aux limites

On envisagera trois types de conditions aux limites aux extrémités du domaine d'étude $0 \leq x \leq L$:

- condition "type Dirichlet" ou contact thermique parfait :
La valeur de T est imposée à une ou aux deux des extrémités du domaine :

$$T(0, t) = T_0(t) \text{ et/ou } T(L, t) = T_L(t)$$

C'est le cas, par exemple, d'une barre en contact avec deux thermostats ;

- condition "de Neumann" ou condition de flux :
Le flux thermique est imposé à une ou aux deux extrémités du domaine :

$$\Phi_0(t) = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)$$

- condition mixte issue de la loi de Newton :
À l'interface solide-fluide (par exemple en $x = L$) il y a continuité du flux :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h(T(L, t) - T_{\text{air}})$$

3 - Discrétisation

On passe du modèle continu au modèle discret (passage opposé à celui effectué lors de la marche aléatoire à l'échelle microscopique).

Discrétisation spatiale : On divise le solide de longueur L en N domaines de longueur $\Delta x = \frac{L}{N}$. On va donc chercher les températures aux positions $x_i = i\Delta x$ avec $i \in [0, 1, \dots, N-1, N]$.

Discretisation temporelle : on divise le temps en "pas de temps" : Δt . Si on souhaite étudier la diffusion sur une durée $t_{\max} = M\Delta t$, on va l'étudier aux instants t_k tels que $t_k = k\Delta t$ avec $k \in [0, 1, \dots, \frac{t_{\max}}{\Delta t} = M]$.

On passe de la fonction continue $T(x, t)$ pour $x \in [0, L]$ et $t \in [0, t_{\max}]$ à un ensemble de valeurs discrètes $T_{i,k}$ avec $i \in [0, \dots, N]$ et $k \in [0, \dots, M]$ telles que $T(x_i, t_k) = T_{i,k}$.

IV - Méthode des différences finies

1 - Approximation des dérivées par des différences finies

On discrétise l'équation de diffusion : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Pour le premier terme :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt} \simeq \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t}$$

Finalement, nous pouvons remplacer $\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_k)$ par $\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t}$.

Pour le second terme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x} \right) \simeq \frac{\frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x} - \frac{T(x, t) - T(x - \Delta x, t)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

On a donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \simeq \frac{T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

Nous pouvons remplacer $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_k)$ par $\frac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}}{(\Delta x)^2}$.

On obtient donc :

$$\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t} = D \frac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}}{(\Delta x)^2}$$

Connaissant les températures à l'instant t_k (l'ensemble des $T_{i,k}$ pour i entre 0 et N) on peut en déduire les températures à t_{k+1} par :

$$T_{i,k+1} = T_{i,k} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k})$$

Remarque 1 : il faut faire attention aux conditions aux limites ($i = 0$ et $i = N$).

Remarque 2 : Ce schéma n'est stable que si $\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$.

2 - Prise en compte des conditions aux limites

Le schéma précédent permet de calculer les températures $T_{i,k}$ pour $1 \leq i \leq N - 1$ autrement dit toutes les températures à l'exception des bords ($i = 0$ et $i = N$).

a) Condition de type Dirichlet

C'est la situation du contact thermique parfait, la température est fixée à l'une des extrémités (ou aux deux) : $T(0 \text{ ou } L, t) = T_{lim}(t)$. On aura donc $T_{0,k} = T_{lim0,k}$ et/ou $T_{L,k} = T_{limL,k}$ pour tout k .

b) Condition de type Neumann

Dans cette situation, c'est le flux thermique qui est fixé : $\Phi(t)$, on a alors $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{1}{\lambda S} \Phi_0(t)$.

On admet que cela se traduit par :

$$T_{0,k+1} = T_{0,k} + 2 \frac{D \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[T_{1,k} - T_{0,k} + \frac{\Delta x}{\lambda S} \Phi_0(t_k) \right]$$

V - Application au barreau droit isolé latéralement

On étudie la diffusion thermique le long d'un barreau droit cylindrique de rayon $a = 7,5$ mm, de longueur $L = 50$ cm. Ce barreau est constitué de fer.

Données :

- conductivité thermique du fer $\lambda \simeq 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$,
- coefficient de transfert conducto-convectif $h \simeq 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$,
- masse volumique du fer $\mu = 7,86.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$,
- capacité thermique massique du fer $c = 444 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

Calculer D diffusivité thermique du fer.

1 - Barreau isolé latéralement avec deux thermostats aux extrémités

On étudie le régime transitoire d'un barreau, au départ à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$ qui est mis en contact à $t = 0$ avec un thermostat à la température T_0 en $x = 0$ et $T_1 = 80^\circ\text{C}$ en $x = L$.

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial Δx . On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

Q5 On a

$$T_i^{k+1} = \Delta t \cdot D \left(\frac{T_{i+1}^k + T_{i-1}^k - 2T_i^k}{(\Delta x)^2} \right) + T_i^k$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes (sur machine!).

Q6. Donner l'Instruction 1 permettant de définir la diffusivité thermique D .

Q7. L'équation de Q5. est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \dots N_X\}$?

Q8. Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les Instruction 2.1 et Instruction 2.2. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0; t_{max}]$.

Q9. Dédurre des conditions aux limites les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.

Q10. À partir de la question Q5., compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

Tracer le champ des températures dans le barreau toutes les 100 s jusqu'au régime permanent.

2 - Barreau isolé latéralement avec flux fixes aux extrémités

Dans l'expérience du TP, la cellule Peltier génère un flux constant $\Phi_0 = 2,0 \text{ W}$. Reprendre la démarche précédente avec cette nouvelle condition aux limites.