

Autour des générateurs thermoélectriques

En 2017, un rapport de l'agence de l'environnement et de la maîtrise de l'énergie (ADEME) estimait à 3,6 milliards de kWh l'énergie thermique perdue uniquement par les *Data Center* en France. Dans une logique de réduction de nos consommations énergétiques, on cherche aujourd'hui à récupérer et à valoriser cette énergie, appelée "chaleur fatale", issue principalement de l'industrie et des transports.

Ce sujet s'intéresse au générateur thermoélectrique, dispositif capable de convertir la chaleur fatale en travail électrique.

Dans la **partie I**, on étudie l'effet Seebeck à la base du fonctionnement de ces générateurs avec en **sous-partie I.1** la présentation et une interprétation microscopique de cet effet, puis en **sous-partie I.2** une analyse de l'expérience historique à l'origine de sa découverte. Dans la **partie II**, on décrit le principe de fonctionnement d'un générateur thermoélectrique et on calcule son rendement.

Données

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

I L'effet Seebeck

1. Découverte du phénomène

On considère un matériau conducteur électrique, homogène et isotrope, occupant un cylindre droit d'axe $(O, \vec{u}_x)$, de section S et de longueur L (**figure 1**). Les deux sections droites qui limitent le cylindre sont portées aux potentiels électriques $V(x=0) = V_1$ et $V(x=L) = V_2$ avec $V_1 > V_2$. Le régime étant supposé stationnaire, le matériau est parcouru par un courant électrique de densité volumique $\vec{j}_{el} = j_{el} \vec{u}_x$ uniforme. On note σ la conductivité électrique du matériau.

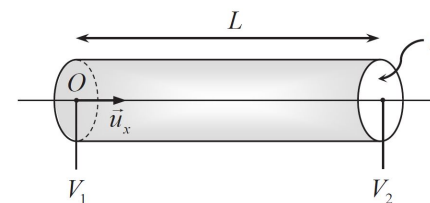


Figure 1 - Conducteur électrique soumis à une différence de potentiel

Q1. Rappeler la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité volumique de courant électrique $\vec{j}_{el}$ au champ électrique $\vec{E}$. Préciser, en justifiant, le sens du champ électrique dans le conducteur. Établir l'expression de la résistance électrique R_{el} du cylindre : $R_{el} = \frac{L}{\sigma S}$.

Le matériau considéré est également un conducteur thermique, de conductivité thermique λ . Par contact avec deux sources idéales, les deux sections droites qui limitent le cylindre sont portées aux températures $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$ avec $T_1 > T_2$. Le régime étant toujours supposé stationnaire, le matériau est parcouru par un flux de chaleur de densité volumique $\vec{j}_{th} = j_{th} \vec{u}_x$ uniforme.

Q2. Rappeler la loi locale de Fourier reliant le vecteur densité volumique de courant thermique $\vec{j}_{th}$ au gradient de température $\vec{\text{grad}}(T)$. En précisant les analogies avec le résultat précédent, donner l'expression de la résistance thermique R_{th} du cylindre.

Lorsque le matériau conducteur est uniquement soumis à un gradient de température, ce gradient est aussi source d'un champ électrique qui s'écrit en régime stationnaire : $\vec{E} = \alpha \vec{\text{grad}}(T)$. Cet effet est appelé effet Seebeck. α est le coefficient Seebeck du matériau.

On considérera dans toute la suite du sujet que les coefficients σ , λ et α sont indépendants de la température.

Q3. Dédurre de la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel V dont il dérive que le gradient de température induit une tension ou force électromotrice (f.é.m.) $e = V(x=0) - V(x=L) = V_1 - V_2$ qu'on exprimera en fonction de α et de l'écart de température $T_1 - T_2$.

On souhaite interpréter qualitativement l'effet Seebeck. On suppose pour cela que le matériau est un métal et que les porteurs de charges mobiles forment un "gaz" d'électrons libres.

Q4. On sépare tout d'abord fictivement le matériau en deux compartiments A et B de températures uniformes T_A et T_B , avec $T_A > T_B$. Dans quel compartiment la vitesse moyenne des électrons est-elle la plus élevée? Partant d'une situation où la densité volumique en électrons libres est supposée identique dans les deux compartiments, comment vont évoluer les densités des compartiments par passage des électrons d'un compartiment à l'autre? En transposant désormais cette analyse à une variation continue de la température dans le matériau, indiquer comment va évoluer la densité d'électrons libres sous le seul effet de ce gradient de température.

Q5. L'inhomogénéité de la densité d'électrons libres dans le matériau cause l'apparition d'un champ électrique. Déterminer qualitativement le sens de ce champ. En déduire le signe du coefficient Seebeck que prévoit cette analyse physique.

Q6. La mesure des coefficients Seebeck du cuivre et de l'aluminium donne respectivement : $\alpha_{\text{Cu}} = +1,2 \mu\text{V.K}^{-1}$ et $\alpha_{\text{Al}} = -2,2 \mu\text{V.K}^{-1}$. L'analyse qualitative précédente (question **Q5**) est-elle conforme aux données expérimentales? Justifier brièvement.

2. Étude de l'expérience historique de Seebeck

La **figure 2.a** représente le dispositif expérimental qui permit à Seebeck en 1821 de mettre en évidence l'effet qui porte aujourd'hui son nom. On modélise l'ensemble par un cadre rectangulaire $CDD'C'$ (**figure 2.b**). La portion $C'C$ est en bismuth, de coefficient Seebeck $\alpha_{\text{Bi}} = -72,0 \mu\text{V.K}^{-1}$ et de conductivité électrique $\sigma_{\text{Bi}} = 8,7 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$. Le reste est en cuivre de coefficient Seebeck $\alpha_{\text{Cu}} = +1,2 \mu\text{V.K}^{-1}$ et de conductivité électrique $\sigma_{\text{Cu}} = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. On suppose que la longueur L des portions $C'C$ et $D'D$ est très grande devant la longueur d des portions CD et $C'D'$. La portion $C'D'$ est laissée à la température ambiante T_0 et la portion CD est portée à la température $T > T_0$.

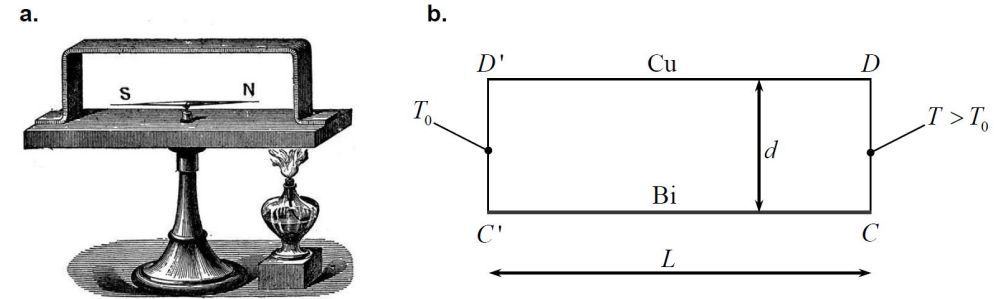


Figure 2 - Expérience de Seebeck

a. Dispositif expérimental b. Modélisation du dispositif

Q7. En circuit ouvert, donner les expressions des forces électromotrices $e_{\text{Bi}} = V_C - V_{C'}$ et $e_{\text{Cu}} = V_D - V_{D'}$ dans les portions respectivement en bismuth et en cuivre en fonction des coefficients α_{Bi} , α_{Cu} et de l'écart de température $T - T_0$ (question **Q3**).

En circuit fermé, il faut en outre tenir compte des résistances électriques $R_{\text{el,Bi}}$ et $R_{\text{el,Cu}}$ des portions respectivement en bismuth et en cuivre (question **Q1**). On donne dans ces conditions le schéma électrique équivalent du cadre $CDD'C'$ (**figure 3**).

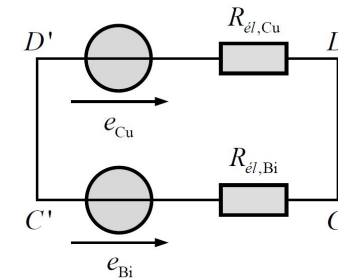


Figure 3 - Schéma électrique équivalent du cadre

Q8. Préciser le sens du courant d'intensité $I > 0$ dans le cadre.

Q9. La portion $C'C$ en bismuth est une tige rectangulaire de longueur $L = 40 \text{ cm}$ et de section $S = 10 \text{ cm}^2$. En négligeant $R_{\text{el,Cu}}$ devant $R_{\text{el,Bi}}$, calculer l'intensité I du courant pour $T - T_0 = 40 \text{ K}$.

Le cadre $CDD'C'$ est situé dans le plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où l'axe $(O, \vec{u}_y)$ est selon la verticale ascendante. On assimile les deux portions $C'C$ et $D'D$ à deux fils conducteurs rectilignes infinis, parallèles à l'axe $(O, \vec{u}_z)$ et distants de d , parcourus par un courant d'intensité I dans des sens opposés (**figure 4**). Le milieu dans lequel est plongé le cadre est assimilé au vide.

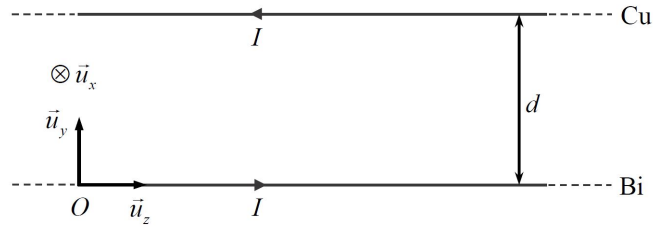


Figure 4 - Modélisation du cadre pour le calcul du champ magnétique

Q10. 5/2 : On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Exprimer en fonction de μ_0 , I et de r le champ magnétique $\vec{B}_{f, \text{Bi}}(M)$ créé par le fil en bismuth confondu avec l'axe $(O, \vec{u}_z)$.

$$\vec{B}_{f, \text{Bi}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Q11. En déduire l'expression du champ magnétique total $\vec{B}_f(M)$ créé par les deux fils en un point M situé dans le plan vertical $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, à égale distance $d/2$ de ces deux fils. **Théorème de superposition**

En l'absence de courant (donc d'une différence de température), le cadre est orienté de sorte qu'une petite aiguille aimantée située en son centre et libre de tourner sur un axe vertical s'oriente dans le plan du cadre. On note $\vec{B}_{T, h} = B_{T, h} \vec{u}_z$ la composante horizontale du champ magnétique terrestre. En présence de courant (donc d'une différence de température), on constate que l'aiguille tourne d'un angle $\beta < \pi/2$ dans le plan horizontal $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$.

Q12. Exprimer l'angle β en fonction de la norme des champs $\vec{B}_f$ et $\vec{B}_{T, h}$. Calculer β sachant que $B_{T, h} = 2.10^{-5}$ T. On prendra $d = 5$ cm et $I = 6$ A.

II Principe d'un générateur thermoélectrique

L'étude de l'effet Seebeck dans la **partie I** suggère la possibilité aux matériaux de convertir de l'énergie thermique en énergie électrique. C'est ce qui est réalisé dans les générateurs thermoélectriques. Un module élémentaire d'un tel convertisseur est constitué de l'assemblage de deux matériaux semi-conducteurs (SC), l'un de dopage de type p (les porteurs de charges majoritaires sont des lacunes électroniques ou "trous" de charge $+e$), l'autre de dopage de type n (les porteurs de charges majoritaires sont des électrons de charge $-e$). Ces matériaux constituent les "jambes" du module qui sont montées électriquement en série et thermiquement en parallèle (**figure 5**). À l'une des extrémités du module, les matériaux sont reliés entre eux par une connexion métallique mise en contact avec une plaque céramique électriquement isolée et maintenue à une température T_C (source chaude). À l'autre extrémité du module, les deux matériaux sont mis en contact avec une plaque céramique identique maintenue à une température T_F (source froide) et reliés entre eux par l'intermédiaire d'une charge de résistance électrique R_c . Chaque jambe occupe un cylindre droit d'axe $(O, \vec{u}_x)$, de longueur L et de section S , de surface latérale isolée thermiquement. Les matériaux semi-conducteurs ont des coefficients Seebeck $\alpha_p > 0$ et $\alpha_n < 0$ pour des dopages de type respectivement p et n .

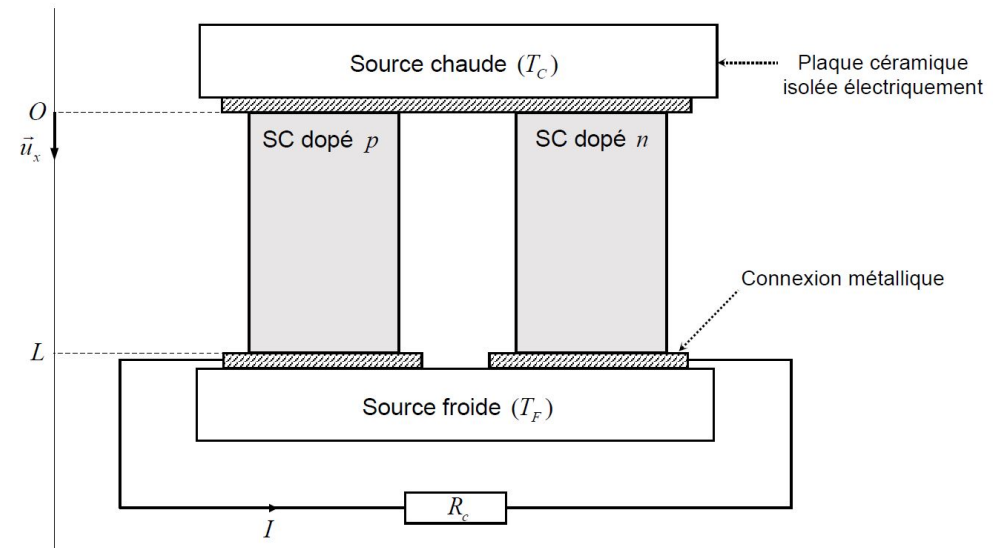


Figure 5 - Schéma de principe d'un générateur thermoélectrique

Ce module fonctionne comme une machine thermique ditherme. On note $\mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}_F$ les puissances thermiques algébriques fournies au module par les sources respectivement chaude et froide, et $\mathcal{P}_{el}$ la puissance électrique algébrique reçue par le module.

Q13. Préciser les signes de $\mathcal{P}_C$, $\mathcal{P}_F$ et $\mathcal{P}_{el}$. Définir le rendement η du module.

Q14. En régime stationnaire, que dire des variations élémentaires d'énergie interne dU et d'entropie dS du module entre les instants t et $t + dt$?

On assimile le module à une phase condensée incompressible indilatable. Dédurre alors des principes de la thermodynamique que son rendement η a une limite supérieure, appelée rendement de Carnot. Exprimer le rendement de Carnot η_{Carnot} en fonction de T_C et de T_F . À quelle condition sur le fonctionnement du module ce rendement limite pourrait-il être atteint ?

Q15. Avec l'orientation choisie pour la définir (**figure 5**), l'intensité I du courant qui circule dans le module en régime stationnaire est positive. Préciser les sens de déplacement des trous dans le semi-conducteur de dopage de type p et des électrons dans le semi-conducteur de dopage de type n . Aurait-on pu imaginer faire fonctionner un module avec des jambes constituées de semi-conducteurs de dopage de même type ? Justifier.

On s'intéresse tout d'abord à l'unique jambe constituée du semi-conducteur de dopage de type p . On note σ_p et λ_p respectivement la conductivité électrique et la conductivité thermique de ce matériau. En régime stationnaire, la jambe est parcourue par un courant électrique de densité volumique $\vec{j}_{el} = j_{el} \vec{u}_x$ uniforme et d'intensité $I > 0$. La température en tout point M dans la jambe est alors de la forme $T(M) = T(x)$. On néglige les résistances de contact (électriques et thermiques) aux interfaces entre le semi-conducteur et les connexions métalliques. On pourra ainsi considérer que $T(x = 0) = T_C$ et $T(x = L) = T_F$.

Q16. Exprimer $\vec{j}_{el}$ en fonction notamment de I .

Le champ électrique $\vec{E}$ au sein de la jambe cède aux porteurs de charges la puissance volumique $p_v = \vec{j}_{el} \cdot \vec{E}$.

Q17. En effectuant, en régime stationnaire, un bilan thermique entre les instants t et $t + dt$ pour la portion de jambe comprise entre les abscisses x et $x + dx$, établir l'équation différentielle vérifiée par j_{th} , où $\vec{j}_{th} = j_{th} \vec{u}_x$ est le vecteur densité volumique de courant thermique dans la jambe. On fera apparaître explicitement la puissance volumique p_v .

En fait, un gradient de potentiel au sein du semi-conducteur n'engendre pas seulement un courant électrique, mais aussi un flux de chaleur. Cet effet découvert quelques années après l'effet Seebeck est appelé effet Peltier. On admet que la prise en compte de ces effets thermoélectriques conduit à la généralisation suivante des lois locales d'Ohm et de Fourier (questions **Q1** et **Q2**) :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\vec{j}_{el}}{\sigma} + \alpha \overrightarrow{\text{grad}}(T) \\ \vec{j}_{th} = \alpha T \vec{j}_{el} - \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \end{cases}$$

Q18. Dédurre de l'équation différentielle précédente que $\frac{d^2 T}{dx^2} = -k$, où k est une constante positive qu'on exprimera en fonction de I , σ_p , λ_p et de S .

Q19. Compte tenu des conditions aux limites, établir l'expression de $T(x)$ en fonction de k , L , T_C et de $\Delta T = T_C - T_F$.

Q20. En faisant apparaître les résistances électrique $R_{el,p}$ et thermique $R_{th,p}$ de la jambe (questions **Q1** et **Q2**), montrer que la puissance thermique $\mathcal{P}_{th,p}(x = 0)$ fournie par la source chaude à la jambe a pour expression : $\mathcal{P}_{th,p}(x = 0) = \alpha_p I T_C + \frac{\Delta T}{R_{th,p}} - \frac{1}{2} R_{el,p} I^2$.

On montre de façon analogue que la puissance thermique $\mathcal{P}_{th,n}(x = 0)$ fournie par la source chaude à la jambe constituée du semi-conducteur de dopage de type n a pour expression : $\mathcal{P}_{th,n}(x = 0) = -\alpha_n I T_C + \frac{\Delta T}{R_{th,n}} - \frac{1}{2} R_{el,n} I^2$, où $R_{el,n}$ et $R_{th,n}$ sont les résistances respectivement électrique et thermique de la jambe.

Q21. Dédurre des résultats précédents l'expression de la puissance thermique algébrique $\mathcal{P}_C$ fournie par la source chaude au module. On introduira le coefficient Seebeck global du module $\alpha = \alpha_p - \alpha_n$ et les résistances équivalentes électrique R_{el} et thermique R_{th} du module, à exprimer en fonction de $R_{el,p}$, $R_{el,n}$, $R_{th,p}$ et de $R_{th,n}$.

Q22. On montre de façon analogue que la puissance thermique algébrique $\mathcal{P}_F$ fournie par la source froide au module s'écrit : $\mathcal{P}_F = -\alpha I T_F - \frac{\Delta T}{R_{th}} - \frac{1}{2} R_{el} I^2$. En déduire l'expression de la puissance électrique algébrique $\mathcal{P}_{el}$ reçue par le module.

Q23. Sachant que la charge de résistance R_c reçoit la puissance électrique $-\mathcal{P}_{el}$, exprimer l'intensité I du courant en fonction de α , ΔT , R_{el} et de R_c .

Q24. Montrer que la puissance électrique reçue par la charge est maximale lorsque $R_c = R_{el}$, R_{el} et ΔT étant fixés. On évoque l'adaptation d'impédance. Exprimer cette puissance $|\mathcal{P}_{el}|_{max}$ en fonction de α , ΔT et de R_{el} .

Q25. Le module est destiné à alimenter une montre. Il fonctionne grâce à l'écart de température entre la peau en contact avec la montre et l'air ambiant, typiquement $\Delta T = 1$ K. Estimer à l'aide des données suivantes le nombre N de modules nécessaires à associer sachant que la puissance de fonctionnement de la montre est $\mathcal{P}_m = 15$ μ W. On pourra considérer qu'un module fournit la puissance maximale déterminée dans la question **Q24**.

Semi-conducteur	Dopage de type p	Dopage de type n
α (μ V.K $^{-1}$)	162	-240
σ (S.m $^{-1}$)	$1,8 \cdot 10^5$	$9,9 \cdot 10^4$
L (μ m)	600	600
S (μ m ^{2})	$6,4 \cdot 10^3$	$6,4 \cdot 10^3$

On peut montrer que le rendement maximal d'un module dépend du produit $Z_{pn}T_m$, appelé facteur de mérite, avec $T_m = \frac{T_C + T_F}{2}$ et Z_{pn} une fonction des propriétés de transport (α , λ et σ) des semiconducteurs. La figure 6 indique l'évolution du rendement maximal η_{max} du module en fonction de la température de la source chaude pour plusieurs valeurs du facteur de mérite. La température de la source froide est fixée à 300 K. Dans l'état actuel des technologies, le facteur de mérite n'excède pas 1.

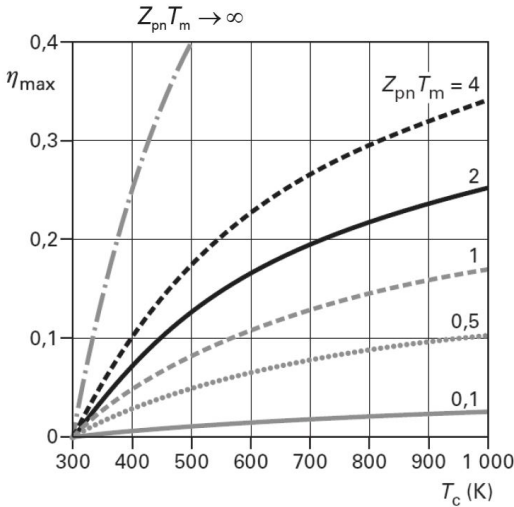


Figure 6 - Rendement maximal d'un générateur thermoélectrique élémentaire

Source : Techniques de l'Ingénieur

Q26. Pourquoi cherche-t-on à maximiser le facteur de mérite ? Estimer le rendement d'un générateur thermoélectrique qui fonctionnerait avec les gaz d'échappement d'une turbine à combustion (centrale thermique destinée à produire de l'électricité) de température de l'ordre de 500°C. Commenter par comparaison aux rendements usuels des machines dithermes.