

Cinématique et dynamique du point

1. Spirale exponentielle

Le mouvement plan d'un point P est donné par son équation en coordonnées polaires :

$$r = ae^{\theta},$$

avec $\theta = kt$ (a et k sont deux constantes positives).

1. Exprimer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires.
2. Montrer que l'angle entre le rayon $\overrightarrow{OP}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constant et donner sa valeur.

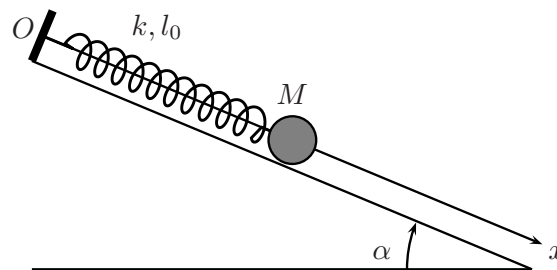
2. Freinage en v^2

Un mobile animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\vec{a} = -kv^2 \vec{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée. La trajectoire est rectiligne.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$.
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x , la vitesse est $v = v_0 e^{-kx}$.
4. Que dire du mobile après un temps très long ?

3. Ressort incliné

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m . On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe (Ox) sur le plan incliné (voir la figure).



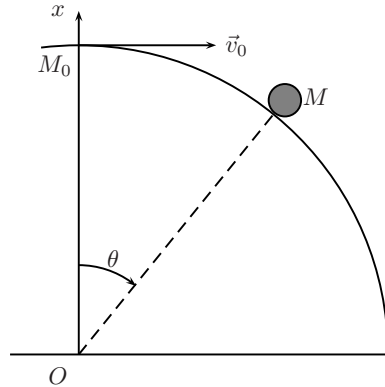
1. Déterminer l'abscisse x_e du point M à l'équilibre en fonction de ℓ_0 , m , g , k et α .
2. À partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur (Ox) et lâché sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d , k , m et x_e .

4. Glissade sur hémicylindre

Un esquimau (point matériel M) glisse sans frottement sur un igloo qui est en fait un demi cylindre de glace, d'axe horizontal, de section circulaire de rayon r . Il est abandonné d'un point M_0 avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$.

Montrer que M quitte le cylindre en un point M'_0 caractérisé par l'angle $\theta_m = (\overrightarrow{OM'_0}, \overrightarrow{OM'_0})$. Entre quelles limites varie cet angle ?

Pour quelle valeur v_{0m} de v_0 le point M quitte-t-il le cylindre tout de suite ?



5. Pendule et tension

Un point matériel M , de masse m , relié à l'origine O par un fil inextensible et sans masse, décrit dans le sens positif un cercle vertical, de centre O , de rayon r .

1. Quelles sont les tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_{A'}$ lorsque M passe en A avec la vitesse $\vec{v}_A$ et en A' avec la vitesse $v_{A'}$? (On exprimera T_A et $T_{A'}$ en fonction de v_A , $v_{A'}$, m , r et g intensité du champ de pesanteur). Les valeurs trouvées sont-elles toujours positives ?
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ que fait OM avec la verticale. Pour intégrer cette équation, multiplier chaque terme par $\frac{d\theta}{dt}$ pour faire apparaître des dérivées connues, en déduire l'expression de la vitesse à l'instant t sachant qu'à l'instant initial $\theta = 0$ et $v = v_0$ (on exprimera v^2 en fonction de v_0 , g , r et θ). Calculer alors la tension du fil T en fonction de v_0 , g , r et θ .
3. La vitesse initiale v_0 étant donnée, on désigne par θ_v la valeur de θ qui annule l'expression de v et par θ_T celle qui annule l'expression de T . Exprimer $\cos \theta_v$ puis $\cos \theta_T$ en fonction de v_0 , g et r , et tracer les courbes $\cos \theta_v = f(v_0^2)$ et $\cos \theta_T = f(v_0^2)$. En déduire la nature du mouvement de M suivant la valeur de v_0 .

