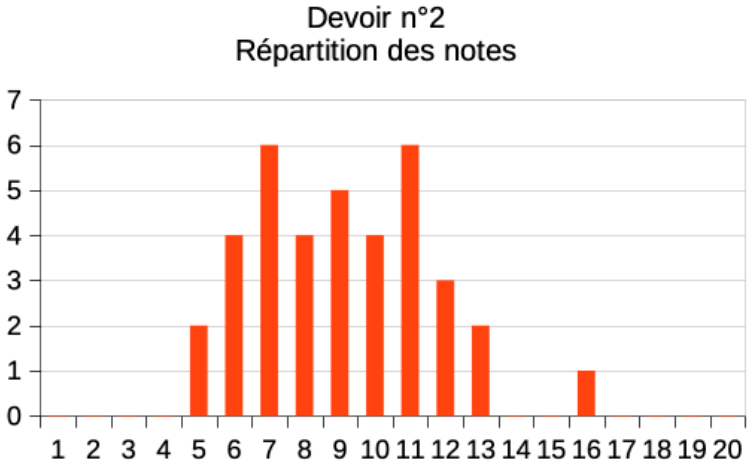
Meilleure note : 16,5

Moyenne : 9,2

Médiane : 8,9

Écart-type : 2,5



Jean PERRIN et l'hypothèse atomique.

I - Équilibre vertical d'un gaz à la température ambiante

1. D'après l'équation des gaz parfaits (notés GP), $P_0V_0 = nRT_0$ soit, avec $T_0 = 300$ K et $P_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa :

$$\boxed{V_{\text{molaire}} = \frac{RT_0}{P_0} \simeq \frac{8,3 \cdot 300}{10^5} \simeq 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{ mol}^{-1}}$$

Pour un récipient contenant $n = 1$mole de gaz :

$$\boxed{\frac{V_{\text{sphères}}}{V_{\text{occupé}}} = \frac{nN_A\frac{4}{3}\pi R_m^3}{V_{\text{molaire}}} \simeq \frac{6 \cdot 10^{23} \times 4\pi 10^{-30}}{3 \times 2,5 \cdot 10^{-2}} = 1 \cdot 10^{-4}}$$

Sous 1 atm à $T_0 = 300$ K, le gaz occupe un volume 10000 fois plus grand que le seul volume occupé par des sphères (molécules).

2. Un gaz parfait est un gaz dont les particules sont ponctuelles et n'ont aucune interaction entre elles : ni chocs, ni interaction électromagnétique.
On peut considérer que c'est le cas ici, puisqu'en moyenne chaque particule dispose pour elle-même d'un volume 10^4 fois plus important que son volume propre.

3. Par définition : $E_{c_m} = \frac{1}{2}m_m v^2$ donc en moyenne :

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m_m u^{*^2} \simeq \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T_0}$$

avec u^{*2} la vitesse quadratique moyenne des particules, si on assimile le gaz parfait à un gaz parfait monoatomique ;

et $\boxed{E_{pm} = m_m g z}$
avec z axe vertical ascendant.

Ainsi, pout un récipient de hauteur $h = 3$ m :

$$\boxed{\frac{E_{c_m}}{E_{pm}} \simeq \frac{3RT_0}{2ghM} \simeq \frac{3 \cdot 8,3 \cdot 300}{2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 0,03} \simeq 4 \cdot 10^3.}$$

On a donc $E_{cm} \gg E_{pm}$, soit $E_{m_m} \simeq E_{cm}$ donc la dynamique des particules est régie par l'agitation thermique et le rôle joué par la pesanteur est négligeable dans ces conditions.

4. Équation des GP : $\boxed{\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT_0}}$

SCHÉMA ;
On étudie une tranche de gaz entre z et $z + \mathrm{d}z$ dans le référentiel terrestre galiléen. Elle est soumise à

— son poids ;
— une force pressante en z ;
— la force pressante en $z = \mathrm{d}z$.

Équilibre de la tranche entre z et $z + \mathrm{d}z$:

$$0 = P(z)S - P(z + \mathrm{d}z)S - S\mathrm{d}z\rho g.$$
$$\text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{MgP}{RT_0}$$
$$\text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{Mg}{RT_0}P = 0$$

5. Les solutions sont de la forme : $P(z) = C \cdot e^{-z/H}$ avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$

Condition aux limites : $P(z = 0) = P_0 = C.1$ donc $P(z) = P_0 \underbrace{\exp^{-z/H}}_{A(z)}$

On a bien $\boxed{\frac{P(z)}{P_0} = A(z)}$

et AN : $\underline{H = \frac{8,3 \cdot 300}{0,03 \cdot 10} \simeq 8,3 \text{ km.}}$

Pour $z = h$ de l'ordre de quelques mètres, $\frac{\Delta P(z)}{\Delta z} = \frac{P_0}{\Delta z}\left(1 - e^{-\Delta z/H}\right) \simeq \frac{P_0}{H}$.
AN : $\Delta P \simeq \frac{h}{H} P_0 \simeq \frac{P_0}{10^3} \simeq 1$mbar.
Pour détecter une variation de pression sur quelques mètres il faut un manomètre sensible au mbar près !

Dans le cas de l'eau liquide $\rho_{eau} g = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\Delta P}{\Delta z}$ soit $\Delta P \simeq 1000 \times 10 \times 3 = 3 \cdot 10^4$ Pa détectable. Rappel, pour l'eau +1 bar tous les 10 m !

6. On a $A(z) = \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = \exp\left(-\frac{m_m g z}{k_B T_0}\right)$, soit

$$\boxed{E(z) = m_m g z}$$

énergie potentielle de pesanteur de m_m.

Interprétation : la distribution de pression, ou de densité particulaire dans le champ de pesanteur à une températureT_0 est régie par un facteur de Bollzmann $e^{-E/k_B T_0}$ qui compare l'énergie d'agitation thermique $k_B T_0$ à l'énergie moléculaire caractéristique du phénomène étudié.

7. Soit la $c_g(z)$ concentration $c_g(z)$ du gaz, on a $c_g = \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M} = \frac{P_0}{RT_0} A(z)$. On a bien

$$\boxed{c_g(z) = c_{g_0} A(z) \text{ avec } c_{g_0} = \frac{P_0}{RT_0}.}$$

II - Étude d'un équilibre de sédimentation

8. On étudie dans le référentiel galiléen du laboratoire, une bille de rayon R_b placée dans l'eau.
Forces exercées :

— la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi} = -\mu_e V_b \overrightarrow{g}$;

— le poids $\overrightarrow{P} = +\mu_b V_b \overrightarrow{g}$;

— la force visqueuse $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R_b \overrightarrow{v}$.

9. Principe Fondamental de la dynamique à une bille :

$$m_b \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}z} = (\mu_b - \mu_e) V_b \overrightarrow{g} - 6\pi\eta R_b \overrightarrow{v}.$$

En projetant sur $\vec{e_z}$:

$$\boxed{m_b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \alpha v = (\mu_b - \mu_e) V_b g}$$

Les solutions sont de la forme : $v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_\ell$ avec $v_\ell = \dfrac{(\mu_b - \mu_e) Vb}{\alpha} g = \dfrac{m^* g}{\alpha}$ et $\tau = \dfrac{m_b}{\alpha}$; on a donc

$$\boxed{m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b \text{ masse apparente.}}$$

À $t = 0$, $v(0) = 0$, donc

$$\boxed{v(t) = v_\ell \left[1 - e^{-t/\tau}\right] \text{ avec } \tau = \frac{m_b}{\alpha}.}$$

AN : $\tau = \dfrac{m_b}{\alpha} \simeq \dfrac{4 \cdot 10^{-17}}{4 \cdot 10^{-9}} \simeq 10^{-8}\text{s} \rightarrow$ régime permanent quasi-immédiat.

AN : $v_\ell = \dfrac{m^* g}{\alpha} \simeq \dfrac{200 \cdot 3 \cdot 10^{-20} \cdot 10}{4 \cdot 10^{-9}} \simeq 1,5 \cdot 10^{-8}\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (quasi-statique à l'échelle l'expérience)

10. $[j] = [cv] = \text{m}^{-2} \cdot \text{ s}^{-1}$: flux surfacique de particules.
Coefficient de diffusion (loi de Fick) : D en $\text{m}^2 \cdot \text{ s}^{-1}$.
Équilibre macroscopique à T_0 : la pesanteur est compensée par la diffusion qui remonte le gradient de concentration.
À l'échelle microscopique, les collisions successives compensent en moyenne la chute gravitaire.
On écrit donc $\overrightarrow{j_c} + \overrightarrow{j_n} = \overrightarrow{0}$, soit $D\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} + cv_\ell = 0$.
Solution : $c(z) = c_0 e^{-z/H_b} = c_0 A(z)$ avec $H_b = \dfrac{D}{v_\ell}$ en $\dfrac{m^2 \cdot s^{-1}}{m \cdot s^{-1}} = m$ (cohérent) .

$$H_b = \frac{D\alpha}{m^* g} = \frac{6\pi\eta R_b D}{m^* g}.$$

11. On a $E_p^*(z) = m^* g z$ si la réfèrence d'énergie potentielle est prise en $z = 0$.

On écritt $e^{-z/H_B} = e^{-E_p^*(z)/k_B T_0} \Leftrightarrow E_p^*(z) = m^* g z = k_B T_0 z / H_b$

$\Leftrightarrow m^* g (6\pi\eta) R_b D = k_B T_0 m^* g \Leftrightarrow D = \dfrac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b}$

On trouve, à $T_0 = 300$ K, $D \simeq 10^{-12}$ m^2/s ce qui est cohérent pour une diffusion particulaire dans un liquide.
On note aussi que cette estimation correspond alors à $H_b \simeq 50$ μm, d'après (10).

12. Conservation de la matière sur une colonne infinie :

$$N = 13000 = \int_0^{+\infty} c_0 e^{-z/H_b} dz S = c_0 S \left(-H_b\right) \left[e^{-z/H_b}\right]_0^{+\infty} = c_0 S H_b$$

On en déduit :

$$c_0 = \frac{N}{SH_b}.$$

13. Dans une fine couche d'épaisseur e, on compte : $n(z) \simeq c(z).e.S$.
D'après (10) on a donc $\ln(n(z)) = \ln(eSc_0) - z/H_b = \ln\left(\frac{eN}{H_b}\right) - z/Hb$.
Équation d'une droite de pente $-1/H_b$
AN : $H_b = \frac{1000}{24} \simeq 42$ μm, cohérent avec la remarque en (11.).
AN : $\ln\left(\frac{eN}{H_6}\right) = 4,7$ done $e \simeq 0,36\mu m := 1$ fant viser précisèment !
Critique : sur la hauteur $h_1 = 100$ μm, et sachant que $H_b = 42\mu$m : Milieu non infini !

14. On suppose H_b égale à la valeur obtenue par Jean PERRIN.

$$H_b = \frac{6\pi\eta R_b}{m^* g} \cdot \frac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b} = \frac{k_B T_0}{m^* g} \to k_B = \frac{m^* g H_b}{T_0}$$

AN : $k_B^{exp} \simeq 0,9 \cdot 10^{-23}$ J/K. OdG OK.
Cette estimation présente un écart de 30% avec la valeur tabulée. Causes possibles d'erreurs expérimentales : - mesure de position $z \in [5; 100]\mu$m.
- comptage de $n(z)$ sur $e = 0,36\mu$m.

III - Le modèle de Langevin

15. Principe Fondamental de la Dynarmique à une bille dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$$m_b \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_c - \alpha\overrightarrow{v} \quad (E_L)$$

En l'absence de F_c, on a $m_b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \alpha v = 0 \to v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{m_b}{\alpha} = 10^{-8}$ s.

16. On a $\frac{\mathrm{d}(xv)}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}v$ soit

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(xv)}{\mathrm{d}t} - v^2.$$

17. Énergie cinétique moyenne : $\langle E_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m_b v^2$. D'après le théorème d'équipartition de l'énergie à 1 dimension :
$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m_b u^2 = \frac{1}{2}k_B T_0$. a.
Commentaire : on voir que la vitesse u augmente avec T_0, ce qui correspond à la description de L-G Gouy.

18. On multiplie l'équation (E_L) par x et on calcule la moyenne :

$$\left\langle m_b\, x \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \langle xF_c \rangle - \langle \alpha x v \rangle$$

donc $\left\langle x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\rangle + \frac{\alpha}{m_b}\langle xv \rangle = 0 = \left\langle \frac{\mathrm{d}xv}{\mathrm{d}t} \right\rangle - \langle v^2 \rangle + \frac{\alpha}{m_b}\langle xv \rangle$
Soit $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - \langle v^2 \rangle + \frac{\alpha}{m_b}\varphi = 0$.
D'oú : $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m_b}\varphi = u^2$ avec $\begin{cases} \varphi(0) = 0 = A + \tau u^2 \to A = -\tau u^2. \\ \varphi(t) = Ae^{-t/\tau} + \tau u^2 \end{cases}$

On en déduit : $\varphi(t) = \tau u^2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{k_B T_0}{\alpha}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

19. $\left\langle \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \langle 2xv \rangle = 2\varphi \overset{\text{ergotique}}{=} \frac{\mathrm{d}\langle x^2 \rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$.
On intègre : $\Psi(t) = \int 2\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{2k_B T_0}{\alpha}\left(t + \tau e^{-t/\tau}\right) + Cte$.

$\rightarrow$ condition initiale : $\Psi(t=0) = \langle x^2(t=0)\rangle = 0 = \frac{2k_BT_0}{\alpha}(0+\tau) + Cte.$

Solution générale : $\Psi_{(t)} = \frac{2k_BT_0}{\alpha}\left[t + \tau\left(e^{t/\tau} - 1\right)\right]$

donc pour $t \gg \tau$: $\Psi(t) \simeq \frac{2k_BT_0}{\alpha}t = \langle x^2\rangle$.

D_x (en $\mathrm{m^2.s^{-1}}$) : coefficient de diffusion du modèle de Langevin.

AN : $D_x \simeq \frac{2\cdot 1,4\cdot 10^{-23}\cdot 300}{4,5\cdot 10^{-9}} \simeq 2\cdot 10^{-12}\mathrm{m^2/s}$.

Quelques propriétés thermodynamiques de la Terre

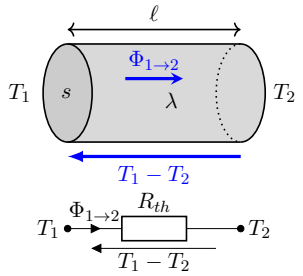
I Mesure de la conductivité thermique d'une roche terrestre

Q1. On considère un conducteur thermique placé entre deux températures T_1 et T_2. Il est traversé par un flux thermique conservé $\Phi_{1\to2}$ orienté de T_1 vers T_2. On définit la résistance thermique par :

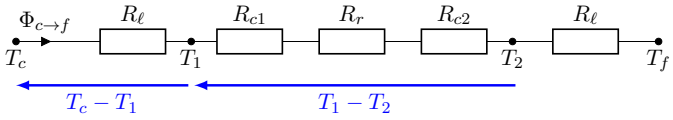
$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to2}}}$$

Soit dans le cas d'un conducteur thermique λ, de section s et de longueur ℓ, la résistance thermique s'exprime :

$$\boxed{R_{th} = \frac{\ell}{\lambda\cdot s}}$$



Q2. Le dispositif de mesure de la conductivité de la roche est équivalent au modèle électrocinétique suivant :



avec $R_\ell = \frac{\ell}{\lambda_\ell\cdot s}$, $R_r = \frac{d}{\lambda\cdot s}$, $R_{e1} = \frac{e_1}{\lambda_1\cdot s}$ et $R_{c2} = \frac{e_2}{\lambda_2\cdot s}$

Donc $\Phi c \to f = \dfrac{T_c - T_1}{R_\ell} = \dfrac{T_1 - T_2}{R_{c1} + R_r + R_{c2}}$
$\implies \dfrac{T_1 - T_2}{T_c - T_1} = \dfrac{R_{c1} + R_r + R_{c2}}{R_\ell} = \dfrac{\lambda_\ell}{\ell}\left(\dfrac{e_1}{\lambda_1} + \dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{e_2}{\lambda_2}\right)$

On remarque que $r = \dfrac{T_1 - T_2}{T_c - T_1}$ est une fonction affine de d : $\dfrac{T_1 - T_2}{T_c - T_1} = A \cdot d + B$, avec $A = \dfrac{\lambda_\ell}{\ell\lambda}$. En mesurant le rapport r pour différente valeur de d, le tracé $r = f(d)$ donne une droite affine. En déterminant par régression linéaire, la pente de la droite A, on peut en déduire la conductivité thermique $\lambda = \dfrac{\lambda_\ell}{A \cdot \ell}$.

On suppose ici que $\dfrac{e_1}{\lambda_1} + \dfrac{e_2}{\lambda_2}$ *reste constant pour les différentes mesures.*

II Évolution de la température à l'intérieur de la Terre

Q3. La solution générale de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\ln 2}{\tau_i} N_i = 0$ est :
$N_i(t) = Ae^{-\frac{\ln 2}{\tau_i}t}$ et par application de la condition initiale $N_i(0) = N_{i0} = A$. On en déduit que

$$\boxed{N_i(t) = N_{i0} e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i}t}}$$

Q5. • Entre t et $t + \mathrm{d}t$, le nombre d'atomes radioactifs i par unité de volume qui se sont désintégrés est :

$$|\mathrm{d}N_i| = |N_i(t + \mathrm{d}t) - N_i(t)| = \left|\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right| = \frac{\ln 2}{\tau_i} N_i \mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{\tau_i} N_{i0} e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i}t}\,\mathrm{d}t$$

Dans un volume V de roche et donc de masse $m = \mu \cdot V$, la fraction massique de l'isotope i est donnée par :

$$x_i = \frac{m_i}{m} = \frac{n_i}{\mu V} \cdot \mathcal{M}_i = N_i \frac{\mathcal{M}_i}{\mathcal{N}_A \mu} \quad \implies \quad N_{i0} = \frac{\mu \mathcal{N}_A x_{i0}}{\mathcal{M}_i}$$

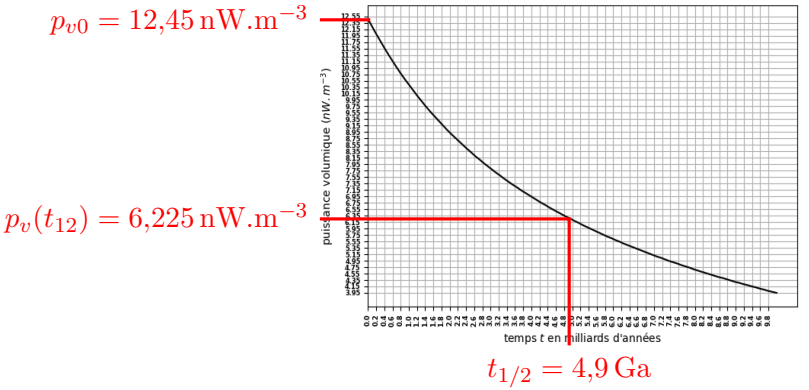
On en déduit l'énergie libérée par unité de volume par les atomes radioactifs i : $\mathrm{d}E_i = |\mathrm{d}N_i|\varepsilon_i$. Soit une puissance volumique libérée par les atomes radioactifs i :

$$p_{vi} = \frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} \quad \implies \quad \boxed{p_{vi} = \frac{\ln 2}{\tau_i} \frac{\mu \mathcal{N}_A x_{i0} \varepsilon_i}{\mathcal{M}_i} e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i}t}}$$

• D'où la puissance totale libérée par les trois radioactifs :

$$\boxed{p_v = \sum_i p_{vi} = \ln 2 \cdot \mu \mathcal{N}_A \sum_{i=1}^{3} \frac{x_{i0}\varepsilon_i}{\mathcal{M}_i \tau_i} e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i}t}}$$

Q6. À $t = 0$, $p_v(t = 0) = p_{v0} = 12.45\,\mathrm{nW\,m^{-3}}$. Soit par définition $p_v(t_{1/2}) = \dfrac{p_{v0}}{2} = 6.225\,\mathrm{nW\,m^{-3}}$.



Par lecture graphique, on en déduit AN : $t_{1/2} = 4.9$ milliards d'années (ordre de grandeur de l'âge de la Terre).

Q7. Le système Terre est à symétrie sphérique, c'est-à-dire qu'il y a invariance par rotation selon θ et φ. Donc $T(M,t) = T(r,t)$.

On en déduit par application de la loi de FOURIER : $\vec{j}(M,t) = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T(r,t) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = j(r,t)\vec{u}_r$.

Q7bis. Appliquons le premier principe thermodynamique infinitésimale à la coquille sphérique entre r et $r+\mathrm{d}r$ de volume $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ et donc de capacité $\delta C = \mu C 4\pi r^2 \mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}^2U = \delta^2 W + \delta^2 Q = \delta^2 Q = \delta^2 Q_{\text{échange}} + \delta^2 Q_{\text{produit}}$$

$\mathrm{d}^2U = \delta C\,(T(r,t+\mathrm{d}t) - T(r,t)) = \mu C 4\pi r^2 \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}r$ par hypothèse de PCII

$\delta^2 Q_{\text{produit}} = p'_v 4\pi r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}t$: production de la chaleur due à la radioactivité

$\delta^2 Q_{\text{échange}} = \delta Q(r,t) + \delta Q(r+\mathrm{d}r,t)$: transferts thermiques en r et $r+\mathrm{d}r$

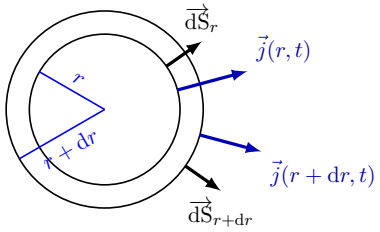
Or $\quad \delta Q(r,t) = \oiint_{\mathscr{S}(r)} \vec{j}(r,t)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}_r = 4\pi r^2 j(r,t)\mathrm{d}t$

et $\quad \delta Q(r+\mathrm{d}r,t) = -\oiint_{\mathscr{S}(r+\mathrm{d}r)} \vec{j}(r+\mathrm{d}r,t)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}_{r+\mathrm{d}r}$

$= -4\pi(r+\mathrm{d}r)^2 j(r+\mathrm{d}r,t)\mathrm{d}t$

Donc $\quad \delta^2 Q_{\text{échange}} = \left(4\pi r^2 j(r,t) - 4\pi(r+\mathrm{d}r)^2 j(r+\mathrm{d}r,t)\right)\mathrm{d}t$

$= -\mathrm{d}\left(4\pi r^2 j(r,t)\right)\mathrm{d}t$



Soit en rassemblant :

$$\boxed{\mu C 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(4\pi r^2 j(r,t)\right)\mathrm{d}t + p'_v 4\pi r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}t}$$

Q9.

a. On a donc $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$. Et par la loi de FOURIER, $\vec{j}(r) = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(T) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = j(r)\vec{u}_r$. D'où l'équation obtenue précédemment devient :

$$0 = -\mathrm{d}\left(4\pi r^2 j(r)\right)\mathrm{d}\,t + p'_v 4\pi r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}t \iff \frac{\mathrm{d}\left(r^2 j(r)\right)}{\mathrm{d}r} = p'_v r^2$$

avec $j(r) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{p'_v}{\lambda} r^2}$$

b. Résolvons l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{p'_v}{\lambda}r^2 \iff r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{p'_v}{3\lambda}r^3 + A \iff \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{p'_v}{3\lambda}$$

$$\iff T(r) = -\frac{p'_v}{6\lambda}r^2 - \frac{A}{r} + B$$

On applique les conditions aux limites : $T(r=0) = cste \Rightarrow A = 0$, pour éviter la divergence du terme en $\frac{1}{r}$ et $T(r=R_T) = T_S = -\dfrac{p'_v}{6\lambda}R_T^2 + B$ soit $B = T_s + \dfrac{p'_v}{6\lambda}R_T^2$. On en déduit la loi de variation spatiale de la température suivante :

$$\boxed{T(r) = \frac{p'_v}{6\lambda}\left(R_T^2 - r^2\right) + T_s}$$

c. À l'aide de la loi de FOURIER, $j(r) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{j(r) = \frac{p'_v}{3} r.}$$

d. On a $j(R_T) = \dfrac{p'_v}{3} R_T \quad \Longrightarrow \quad p'_v = \dfrac{3}{R_T} j(R_T) = \dfrac{3}{6.4 \times 10^6} 70 \times 10^{-3} \simeq 3 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-3}} \Rightarrow \underline{p'_v = 30\,\mathrm{nW\,m^{-3}}}$.

À la question **Q6.**, nous avions $p_v = 12.45\,\mathrm{nW\,m^{-2}} < p'_v$. La différence pourrait s'expliquer par la présence d'autres sources de chaleur : autres atomes radioactifs, frottements. De plus, le modèle proposé ne prend pas en compte le fait que la structure interne de la Terre (noyau, manteau, croûte) dans lesquels les proportions d'atomes radioactifs pourraient varier et donc la puissance volumique produite dépendrait de r.

II.1 Estimation de l'âge de la Terre

Q8. On a $j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial z}$. En multipliant l'équation précédente par $-\lambda$ et en la dérivant pas rapport à z, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial j_Q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 j_Q}{\partial z^2}}$$

Q9. La densité de flux thermique en $z = 0$ tend vers l'infini lorsque t tend vers zéro.
Lorsque t tend vers $+\infty$, la densité de flux thermique en $z = 0$ tend vers 0.

La densité de flux thermique à une profondeur z non nulle tend vers 0 à la fois lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers $+\infty$.

Q10. La solution proposée par Lord Kelvin est bien solution de l'équation différentielle précédente : $\dfrac{\partial\, j_Q}{\partial\, t} = D \dfrac{\partial^2 j_Q}{\partial\, z^2}$.

De plus on a bien pour $z = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} j_Q(0,t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to\infty} j_Q(0,t) = \pm 0$.

De même, on obient les bonnes limites pour une profondeur non nulle.

Q11. Les équations aux dimensions des paramètres du problème sont :

$$\begin{aligned}
[j_Q] &\equiv M.L^2.T^{-2}.T^{-1}.L^{-2} \equiv M.T^{-3} \\
[A] &\equiv [j_Q]L \equiv M.L.T^{-3} \\
[T_0 - T_s] &\equiv \Theta \\
[\lambda] &\equiv [j_Q]L\Theta^{-1} \equiv M.L.T^{-3}.\Theta^{-1} \\
[\rho] &\equiv M.L^{-3} \\
[c_p] &\equiv (M.L^2T^{-2}).M^{-1}.\Theta^{-1} \equiv L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
A &\equiv a.(T_0 - T_S)^\alpha.\lambda^\beta.\rho^\gamma.c_p^\delta \\
&\equiv \Theta^\alpha (M.L.T^{-3}.\Theta^{-1})^\beta (M.L^{-3})^\gamma (L^2.T^{-2}.\Theta^{-1})^\delta \\
&\equiv M^{\beta+\gamma} L^{\beta-3\gamma+2\delta} T^{-3\beta-2\gamma} \Theta^{\alpha-\beta-\delta}.
\end{aligned}$$

L'homogénéité de la formule de Lord Kelvin impose alors

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 1 \\ -3\beta - 2\gamma = -3 \\ \alpha - \beta - \delta = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \beta = 1 \\ \delta = 0 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

soit finalement

$$\boxed{A = a\lambda(T_0 - T_S)}$$

Q12. On a, d'après l'énoncé :

$$A = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}(T_0 - T_S)$$

or

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{j_Q}{\lambda} = \frac{A}{\lambda\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right).$$

La valeur du gradient thermique en surface de la Terre est donc

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{A}{\lambda\sqrt{Dt}} = \frac{T_0 - T_S}{\sqrt{\pi Dt}}.$$

Q13. Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de 10^{-6} m^2.s^{-1}, l'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de 30 K.km^{-1}. L'âge de la Terre obtenu à partir de ce modèle est, selon les valeurs de $T_0 - T_S$:

$$t = \frac{(T_0 - T_S)^2}{\pi D \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} 3,5.10^{14} \text{ s} \simeq 11 \text{ millions d'années} \\ 1,4.10^{15} \text{ s} \simeq 44 \text{ millions d'années} \end{array} \right.$$

L'âge de la Terre est en fait compris entre 4 et 5 milliards d'années. La radioactivité naturelle, inconnue à l'époque de Kelvin, n'avait pu être prise en considération dans ce modèle.

Imagerie des nanoparticules d'or

Extrait du concours Centrale-Supélec MP 2021

I - Equation de la diffusion thermique en géométrie sphérique

Q1. Le gaz entourant la sphère d'a est considéré comme homogène et infini avec une température initiale uniforme - Le système étudié est donc à symétrie sphérique - T ne dépend spatialement que de r.

Q2. Σ étudié = coquille sphérique entre r et r+dr

D'après le 1er principe entre t et t+dt $dU = \delta Q$

$$C_g \cancel{4\pi r^2 dr} \frac{\partial T}{\partial t} dt = 4\pi r^2 j_{th}(r,t) dt - 4\pi (r+dr)^2 j_{th}(r+dr,t) dt$$

Or d'après la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(r,t) = -k \overrightarrow{grad}\, T(r,t) = -k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$

Soit $C_g \cancel{4\pi r^2 dr} \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi \left(-\frac{\partial (j_{th} r^2)}{\partial r} \right) dr$

$$\boxed{C_g \frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{k}{\cancel{r^2}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}$$

II - Température du milieu en régime stationnaire

Q3. On a $\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = 0$ soit $T(r)$

Il vient $\boxed{\frac{d^2}{dr^2}(rT(r)) = 0}$

ou $rT(r) = Ar + B$

$$\Leftrightarrow \boxed{T(r) = A + \frac{B}{r}} \quad \text{pour } r > 0.$$

avec $T(a^+) = A + \frac{B}{a} = T_S$

$\lim_{r \to +\infty} T(r) = T_0 = A$

Soit $B = (T_S - T_0)\, a$

$$\boxed{T(r) = T_0 + (T_S - T_0)\frac{a}{r}}$$

Q4. Soit $P_{sph \to milieu}$ la puissance fournie au milieu par la nanosphère -

$$P_{sph \to milieu} = 4\pi a^2 j_{th}(a)$$

$$= 4\pi a^2 \left(-k \frac{\partial T}{\partial r}(a) \right)$$

$$= 4\pi a^2 k \left(+ (T_S - T_0) \frac{a}{a^2} \right)$$

$$\boxed{P_{sph \to milieu} = 4\pi a k (T_S - T_0)}$$

III - Température de surface de la nanosphère -

On a $P_{abs}(t) = P_0 (1 + \cos \Omega t)$

Q5. Σ' = nanosphère

D'après le premier principe entre t et t+dt

$dU = \delta Q$

avec $\boxed{dU = C_{Au} \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\partial T_S}{\partial t} dt}$

et $\boxed{\delta Q = \left(P_{abs}(t) - P_{sph \to milieu} \right) dt}$

Il vient

$$\frac{4}{3}\pi a^3 C_{Au} \frac{\partial}{\partial t}(\delta T_S) = P_0 (1 + \cos \Omega t) - 4\pi a k \delta T_S$$

$$\frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{4\pi k a} C_{Au} \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} + \delta T_S = \frac{P_{abs}}{4\pi k a}$$

$$\boxed{\delta T_S + \tau \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} = \frac{P_{abs}}{4\pi k a}}$$

avec $\boxed{\tau = \frac{a^2 C_{Au}}{3k}}$

$$[\tau] = \frac{L^2\,[\text{énergie}]^{\gamma-1}\,L^{-3}}{[\beta]\,[jth]\,L^{\gamma-1}} \quad \text{avec } [jth]\,L^2 = [\text{puissance}]$$

$$= L^{-2}\,\frac{[\text{énergie}]}{[\text{puissance}]}\,L^2$$

$[\tau]$ = temps (OK)

Q6. On a $\delta T_S + \tau \frac{\partial \delta T_S}{\partial t} = \frac{P_0}{4\pi k a}(1+\cos \Omega t)$

$$\delta T_S(t) = A e^{-t/\tau} + \delta T_{S\,part}$$

avec $\delta T_{S\,part} = \frac{P_0}{4\pi k a} + A\cos(\Omega t + \varphi)$

En RSF $\underline{\delta T_S}\,(1 + j\Omega\tau) = \frac{P_0}{4\pi k a}$

$$\underline{\delta T_S} = \frac{P_0}{4\pi k a\,(1+j\Omega\tau)}$$

avec $\Omega\tau = 1{,}0\,10^{-3} \ll 1$

Plus simple : dans injecter l'éq différentielle la solution proposée.

Soit $\boxed{\delta T_S \simeq \frac{P_0}{4\pi k a}(1+\cos \Omega t) \text{ pour } t \gg \text{qq } \tau.}$

$$\boxed{T_S(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi k a}(1+\cos \Omega t)}$$

Q7. $$\boxed{\overline{\delta T_S} = \frac{P_0}{4\pi k a}}$$

AN $\overline{\delta T_S} = 5{,}0$ K.

IV. Température du gel autour de la sphère

$$T(r,t) = T_0 + \frac{\alpha}{r}\left[1 + e^{-\frac{r-a}{r_{th}}}\cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{th}}\right)\right]$$

$$r_{th} = \sqrt{\frac{2k}{\Omega C_g}}$$

Q8. r_{th} = longueur caractéristique de la prof de l'onde thermique dans le gel.

Conducteur

Q9. On a pour $r = a^+$

$$T(a^+,t) = T_0 + \frac{\alpha}{a}(1+\cos \Omega t)$$

$$= T_S(t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi k a}(1+\cos \Omega t)$$

D'où $\boxed{\alpha = \frac{P_0}{4\pi k}}$

Q10 $T(r,t) = T_0 + \frac{\alpha}{r}\left(1 + e^{-\frac{r-a}{r_{th}}} \cos\left(\Omega t - \frac{r-a}{r_{th}}\right)\right)$

on considère que $a \ll r_{th}$.

Moyenne sur le temps :

$$\langle T(r,t)\rangle_t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} T(r,t)\,dt$$

$$= T_0 + \frac{\alpha}{r}$$

$$\boxed{\langle \delta T\rangle_t = \frac{\alpha}{r}}$$

Moyenne sur le volume de la sphère de rayon r_{th}

$$\overline{\delta T} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\left(r_{th}^3 - a^3\right)} \int_{r=a}^{r=r_{th}} \langle \delta T\rangle_t\, 4\pi r^2\, dr$$

$$= \frac{3}{r_{th}^3 - a^3} \int_a^{r_{th}} \alpha r\, dr$$

$$= \frac{3}{2}\alpha \frac{r_{th}^2 - a^2}{r_{th}^3 - a^3}$$

Pour $a \ll r_{th}$ $\quad \boxed{\overline{\delta T} = \frac{3}{2}\frac{\alpha}{r_{th}}}$

avec $\overline{\delta T_s} = \frac{P_0}{4\pi K a}$ et $\alpha = \frac{P_0}{4\pi K} = a\,\overline{\delta T_s}$

Il vient $\quad \boxed{\overline{\delta T} = \frac{3}{2}\frac{a}{r_{th}}\overline{\delta T_s}}$ $\qquad r_{th} = 639\,nm$

AN : $\overline{\delta T} = 0{,}17\ K$.

Q11 Pour révéler les faibles variations de l'indice optique du gel on peut utiliser un interféromètre de Michelson.

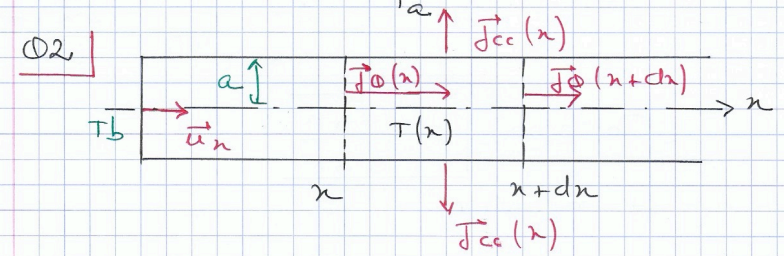
2022.

Refroidir les centres de données

A - A l'échelle des composants

Q1. Loi de Fourier $\quad \vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Q2



Σ = tronçon de cylindre entre x et $x+dx$.

D'après le 1er principe de la thermodynamique entre t et $t+dt$

$$dH = \delta Q \quad \text{car } P_{ext} = cte.$$

avec $dH = 0$ car on considère le régime stationnaire.

$$\delta Q = \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S}_H \text{ entrant}$$

$\Pi \in \mathcal{S}$ surface de Σ

$$\frac{\delta Q}{dt} = \iint_{\pi a^2 \text{ en } x} \vec{j}_Q \cdot dS\, \vec{u}_x + \iint_{\pi a^2 \text{ en } x+dx} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}\,(-\vec{u}_x) + \iint \vec{j}_{cc}\, dS\,(-\vec{n})$$

la paroi latérale

$$\delta Q = \left(j_Q(x) - j_Q(x+dx)\right)\pi a^2 dt - 2\pi a\, dx\, dt\, j_{cc}(x)$$

$$= -\frac{dj_Q}{dx}\pi a^2 dx\, dt - h\left(T(x) - T_a\right)2\pi a\, dx\, dt$$

avec $\vec{j}_D = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

$= -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$

$0 = +\lambda \frac{d^2T}{dx^2} a - h(T - T_a) 2$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_a}$ *

On pose $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}}$

et on obtient $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}}$ (OK)

39 **Q3** $[\delta^2] = \left[\frac{\lambda a}{2h}\right]$

$= \frac{[\text{puissance}] \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L}{1 \cdot [\text{puissance}]\, L^2\, T^{-1}}$

$= L^2$

$[\delta] = L$ OK

ou avec l'éq diff.

AN $\delta = \sqrt{\frac{148 \times 10^{-3}}{30 \cdot 2}}$ $\delta = 5{,}0$ cm (air dat.)

$\delta_v = 1{,}6$ cm (air ventilé)

43 **Q4** On doit avoir $T(0) = T_d$. ← contact thermique parfait

conservation des flux en b → et $\Phi_{th}(b) = j_{cc}(b)$

$-\lambda \frac{dT}{dx}(b) = h(T(b) - T_a)$

Si $b \gg \delta$ on aura $T(b) = T_a$.

45 **Q5** Pour $b \gg \delta$

Les solutions de * sont de la forme :

$T(x) = T_a + A e^{-x/\delta} + B e^{+x/\delta}$

avec $T(0) = T_d = T_a + A + B$

$T(b) = T_a = T_a + A e^{-b/\delta} + B e^{+b/\delta}$

($e^{-b/\delta} \ll 1$, $e^{+b/\delta} \gg 1$)

$\Rightarrow B = 0$ et $A = T_d - T_a$.

Il vient $\boxed{T(x) = T_a + (T_d - T_a) e^{-x/\delta}}$

On constate bien que pour $x/\delta \geq 0{,}6$

$T(x) = T_a$.

Asymptote à l'origine coupe l'asymptote en

$\frac{x}{b} = 0{,}1 = \frac{\delta}{b}$. soit $\frac{b}{\delta} = 10$ (ok).

Q6 Résistance thermique $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{P}$

Pour $b \ll \delta$ le changement de température dans le barreau est faible.

$e^{-x/\delta} \simeq 1 - x/\delta$ et $e^{+x/\delta} = 1 + x/\delta$

$P = j_D(0) S = j_D(b) S = j_{cc}(b) S$.

↑ on néglige les pertes latérales

$= h S (T_d - T_a)$

$\rightarrow R_{th} = \frac{1}{hS}$. Ne dépend pas de λ donc des matériaux

AN $R_{th} = \frac{1}{30\,\pi (10^{-3})^2}$

$R_{th} = 10{,}6\ 10^3\ W^{-1} K$. avec air statique

Si air ventilé → $R'_{th} = 1{,}0\ 10^3\ W^{-1} K$ (ok)

Q7 Pour $b \gg \delta$ $P = j_D(0) S = -\lambda \frac{dT}{dx}(0) S = +\lambda \frac{T_d - T_a}{\delta} S$

$R_{th} = \frac{\delta}{\lambda S}$ AN : $R_{th} = 34\ k W^{-1}$ ok

Q8. Al $b = 2{,}0$ cm

On veut évacuer $P = 200$ W.

$= N \times P_{1\,\text{ailette}}$

↑ nombre d'ailette

avec $P_{1\,\text{ailette}} = \dfrac{T_d - T_a}{R_{th}}$

$T_d = 60°C$

$T_a = 25°C$.

$\delta_{Al} = \sqrt{\dfrac{\lambda_{Al}\, a}{2h}}$ $\delta_{Al} = 6{,}3$ mm

air ventilé $\delta'_{Al} = 2{,}0$ mm.

$\rightarrow \dfrac{b}{\delta_{Al}} = 0{,}318$.

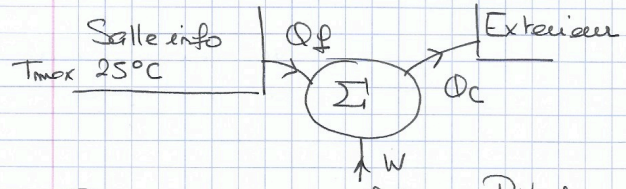
On lit $R_{th} = 25\ K W^{-1}$

D'où $P_{1\,\text{ailette}} = 1{,}4$ W.

Il faut 150 ailettes. beaucoup trop pour pouvoir les placer des 1 composant -

B - A l'échelle des bacs

Q9 Machine réfrigérante :



Par déf $COP = \dfrac{Q_f}{W} = \dfrac{P_{th\,f}}{P}$

soit $P = \dfrac{P_{th\,f}}{COP}$ ← doit compenser l'énergie thermique dégagée par les serveurs

$P_{th\,f} = 100$ kW.h / 1 jour

$= \dfrac{100}{24}$ kW.

$E_{an} = P \times 365{,}25$.

$= \dfrac{100}{3 \times 24}$ kW $\times 365 \times 24$.

$= 12\,10^3$ kWh

Coût $C = 2\,10^3$ euros

Q10. D'après l'équation des gaz parfaits

$PV = nRT$

ou $P = \rho \dfrac{RT}{M}$ $\rho_{air} = \dfrac{P M_{air}}{R T_{max}}$

AN $\rho_{air} = 1{,}1$ kg m^{-3}.

$D_m = \rho_{air} D_v$ $D_m = 940$ kg.h^{-1}

$= 0{,}26$ kg s^{-1}

Q11 Si on estime que le free cooling est efficace

Σ ouvert = pièce.

$D_m (h_s - h_e) = P_{th\,f}$.

GP diatomique $h_s - h_e = c_{p_m}(T_s - T_e)$

avec $c_{p_m} = \dfrac{n\gamma}{\gamma - 1} \dfrac{R}{m} = \dfrac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$ et $\gamma = 1{,}4$

Il vient $D_m \dfrac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_{max} - T_e) = P_{th\,f}$

$T_e = T_{max} - \dfrac{M(\gamma - 1)}{D_m \gamma R} P_{th\,f}$.

AN $T_e = 19°C$