Changements de référentiel

I Introduction et problématique

En mécanique classique, on connaît les lois de la dynamique dans les référentiels galiléens (ex. théorème du moment cinétique, principe fondamental de la dynamique, théorème de l'énergie cinétique).

Problématique : Comment, connaissant la description du mouvement d'un point matériel M dans un référentiel $\mathcal{R}$, peut-on exprimer son mouvement par rapport à un autre référentiel $\mathcal{R}'$?

Dans ce chapitre, on considère deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Rappels :

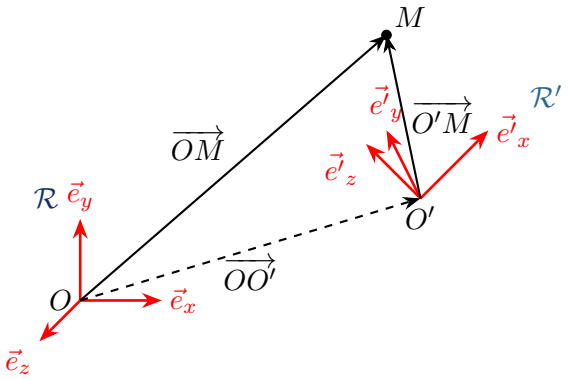
- **Référentiel** Un référentiel est un solide muni d'une horloge par rapport auquel on repère la position d'un point au cours du temps (en repos ou en mouvement).
- **Solide :** système indéformable.
  Soient deux points P et P' du solide, la distance $PP' = \text{cte}$, ce qui implique :

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{PP'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = 0$$

- **Universalité du temps :** La mécanique classique (ou galiléenne / newtonienne) postule que le temps est absolu. Deux horloges dans des référentiels différents indiquent la même heure ($t = t'$).

Chaque référentiel $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est muni d'un repère cartésien (fixe orthonormé direct) :

$$\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}'(O', \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$$



Une étape indispensable est de comprendre le mouvement relatif de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

II Référentiel en translation par rapport à un autre

II.1 Situation et définitions

Rappel : Tous les points d'un solide en translation dans un référentiel donné ont le même déplacement. Le champ des vitesses du solide est uniforme :

.....

Deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en translation l'un par rapport à l'autre si les axes de $\mathcal{R}'$ gardent une direction constante par rapport à $\mathcal{R}$.
Mathématiquement cela signifie qu'à tout instant on a :

.....

.....

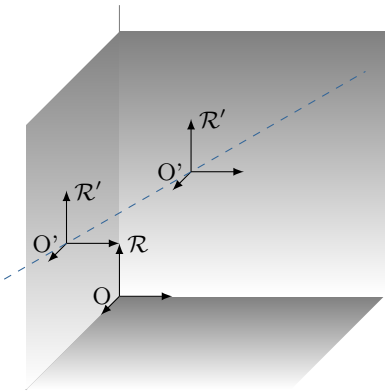
Choix des axes :

$$\vec{e'}_x = \vec{e}_x, \quad \vec{e'}_y = \vec{e}_y, \quad \vec{e'}_z = \vec{e}_z$$

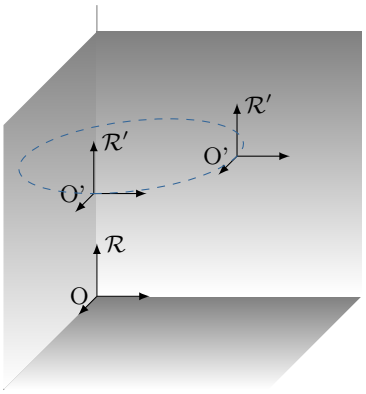
Le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est entièrement décrit par le mouvement de O' par rapport à $\mathcal{R}$.

Exemples de translation :

- Train sur des rails droits : .....
- Ascenseur : .....
- Nacelle de grande roue : .....
- Cabine de téléphérique : .....



Translation rectiligne



Translation circulaire

Soit M un point matériel dont on étudie le mouvement dans les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Vecteur position dans $\mathcal{R}$: .....

Vecteur position dans $\mathcal{R}'$: .....

D'après la relation de Chasles : .....

II.2 Loi de composition des vitesses

Par définition :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}, \quad \vec{v}(M/\mathcal{R}' = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'}$$

En dérivant la relation de Chasles dans $\mathcal{R}$ (en notant que $\overrightarrow{e'}_x$, $\overrightarrow{e'}_y$, $\overrightarrow{e'}_z$ sont fixes dans $\mathcal{R}$ dans le cas d'une translation) :

.....

.....

.....

.....

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{v}(O'/R) + \vec{v}(M/\mathcal{R}')$$

Remarque : Tous les points liés à $\mathcal{R}'$ ont la même vitesse dans $\mathcal{R}$. Soit P le point lié à $\mathcal{R}'$ et coïncidant avec M à l'instant t :

$$\vec{v}(M/R)(t) = \vec{v}(P/R)(t) + \vec{v}(M/\mathcal{R}')(t)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

- $\vec{v}_a = \vec{v}(M/\mathcal{R})$: vitesse absolue.
- $\vec{v}_r = \vec{v}(M/\mathcal{R}')$: vitesse relative.
- $\vec{v}_e = \vec{v}(P/\mathcal{R}$: **vitesse d'entraînement** (vitesse du point coïncidant P par rapport à $\mathcal{R}$).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Application – barque motorisée : Soit un bateau B traversant une rivière. On a : $v(B/\text{rivière}) = 8$ km/h et $v(\text{rivière/berge}) = 5$ km/h.

1. Si le bateau met le cap directement sur la rive en face, où arrive-t-il ?
2. Comment le batelier doit-il faire pour traverser perpendiculairement à la berge ?

II.3 Cas particulier : Translation rectiligne uniforme

Si la translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ se fait à vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$:

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{v}_0$$

En intégrant par rapport au temps, sachant qu'à $t = 0$, O et O' sont confondus :

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Transformation de Galilée :

$$x(t) = x'(t) + v_0 t, \quad y(t) = y'(t), \quad z(t) = z'(t)$$

Remarque : En mécanique relativiste, cette transformation est remplacée par la transformation de Lorentz :

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

II.4 Loi de composition des accélérations

Par définition de l'accélération :

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{a}(M/\mathcal{R}')$$

On identifie l'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(P/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R})$$

D'où :

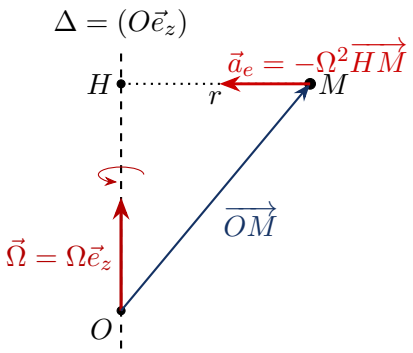
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$$

Cas particulier : Si la translation est uniforme ($\vec{a}(O'/\mathcal{R}) = \vec{0}$), alors $\vec{a}_e = \vec{0}$ et $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}')$.

III Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

III.1 Présentation de la situation

$\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e'}_x, \overrightarrow{e'}_y, \overrightarrow{e'}_z)$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe $\Delta = O\vec{e}_z = O'\overrightarrow{e'}_z$ par rapport à $\mathcal{R}$. On choisit $O \equiv O' \in \Delta$.



On note $\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z$ le vecteur rotation de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$, avec $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt} = \Omega = \text{cte}$.

III.2 Loi de composition des vitesses

Par définition de la vitesse dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} =$$

Et dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} =$$

Pour exprimer $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ à partir des coordonnées dans $\mathcal{R}'$, on écrit $\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{e'}_x + y'\overrightarrow{e'}_y + z'\overrightarrow{e'}_z$. En dérivant dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x'\overrightarrow{e'}_x + y'\overrightarrow{e'}_y + z'\overrightarrow{e'}_z\right)\right)_{\mathcal{R}}$$

$\vec{v}(M/\mathcal{R}) =$ .....

Comme l'axe $\overrightarrow{e'}_z = \overrightarrow{e}_z$ est fixe, $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e'}_z}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$. Exprimons les vecteurs de la base de $\mathcal{R}'$ dans la base de $\mathcal{R}$ en fonction de l'angle de rotation $\alpha(t)$:

$$\vec{e'}_x =$$
$$\vec{e'}_y =$$

En dérivant par rapport au temps dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e'}_x}{\mathrm{d}t}\right)_R =$$
$$\left(\frac{d\vec{e'}_y}{dt}\right)_R =$$

En réinjectant ces dérivées dans l'expression de la vitesse absolue :

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \dot{\alpha}\left(x'\vec{e'}_y - y'\vec{e'}_x\right)$$

Or, le vecteur rotation s'écrit $\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z$. Calculons le produit vectoriel $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$:

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = (\dot{\alpha}\vec{e}_z) \wedge (x'\vec{e'}_x + y'\vec{e'}_y + z'\vec{e'}_z) = \dot{\alpha}x'\vec{e'}_y - \dot{\alpha}y'\vec{e'}_x$$

On en déduit la **formule fondamentale de dérivation** pour tout vecteur $\vec{A}$:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}$$

Et la loi de composition des vitesses devient :

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Interprétation avec le point coïncidant P : Soit P le point fixe dans $\mathcal{R}'$ qui coïncide à l'instant t avec le point mobile M. P effectue un mouvement circulaire d'axe $(O\vec{e}_z)$ et de rayon $HM = r$ dans R. Sa vitesse dans R est :

$$\vec{v}(P/R) = \vec{v}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

D'où l'expression générale :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

III.3 Loi de composition des accélérations

Par définition, l'accélération absolue dans $\mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de la vitesse absolue dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}(M/R) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

En utilisant l'expression $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$, on dérive terme à terme dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{a}(M/R) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/R')}{\mathrm{d}t}\right)_{R} + \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right)_{R}$$

On identifie ainsi les trois termes de l'accélération :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

- **Accélération relative :** $\vec{a}_r = \vec{a}(M/R')$
- **Accélération de Coriolis (ou complémentaire) :** $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/R')$
- **Accélération d'entraînement :** $\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$

Calcul explicite de l'accélération d'entraînement : Soit H la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation Δ. En décomposant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$:

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$$

Car $\vec{\Omega}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires ($\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OH} = \vec{0}$). Par la règle du double produit vectoriel ou géométriquement, sachant que $\vec{\Omega} \perp \overrightarrow{HM}$:

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}\right) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

C'est l'accélération centripète du point coïncidant P lié à R' ($\vec{a}_e = \vec{a}(P/R)$).

où :
- $\vec{a}_r = \vec{a}(M/\mathcal{R}')$ est l'accélération relative.
- $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ est **l'accélération de Coriolis** (ou complémentaire).
- $\vec{a}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ est **l'accélération d'entraînement** (H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation Δ).

IV Cas général d'un changement de référentiel

IV.1 Dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile

Pour tout vecteur $\vec{A}$:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}$$

IV.2 Composition des vitesses (Formule générale)

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$:

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

D'où :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

avec la vitesse d'entraînement générale :

$$\vec{v}_e = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

IV.3 Composition des accélérations (Formule générale)

En dérivant $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$ dans $\mathcal{R}$:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

avec :

— **Accélération de Coriolis :**

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$

— **Accélération d'entraînement :**

$$\vec{a}_e = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$