Dynamique en référentiel non galiléen

I Référentiels galiléen et non galiléens

I.1 Rappels

Principe d'inertie : Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** dans lesquels tout **point matériel isolé** est animé d'un **mouvement rectiligne et uniforme**.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens et M un point matériel isolé. On doit avoir simultanément pour tout mouvement libre :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{0}$$

Or la loi de composition des accélérations s'écrit :

.....

Cette relation devant être vérifiée pour tout point M donc pour tout vecteur vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$, on en déduit nécessairement :

.....

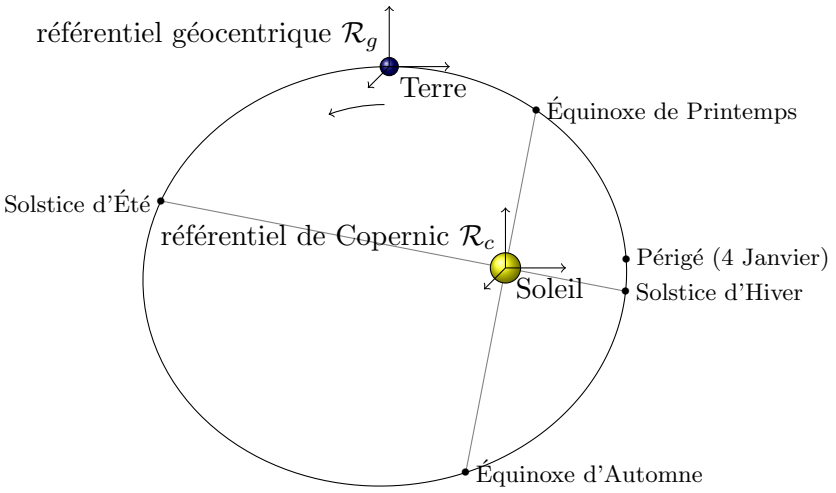
.....

Propriété fondamentale : Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Si O et O' sont confondus à $t = 0$ et $\vec{V}$ désigne la vitesse constante de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, on a la transformation de Galilée :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \vec{V}\,t$$

Remarque expérimentale : Il est impossible de définir un référentiel qui soit rigoureusement galiléen dans l'absolu. En pratique, on considère un référentiel comme galiléen tant que les observations expérimentales n'infirment pas la théorie (en particulier la deuxième loi de Newton) sur l'échelle de temps de l'expérience étudiée.

I.2 Les différents référentiels utilisés



a Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$

Définition : Référentiel lié à la Terre (surface du sol).

Domaine d'utilisation : Étude du mouvement d'un point matériel au voisinage de la surface de la Terre.

Repère associé : Origine O' à la surface du sol, un axe vertical ascendant (z) et deux axes horizontaux (par exemple x vers l'Est et y vers le Nord).

Caractère galiléen : Approximativement galiléen pour des expériences de courte durée devant la période de rotation propre de la Terre ($\tau \ll T_{\text{sid}} \approx 24$ h).
Ce caractère galiléen est mis en défaut par des phénomènes tels que la déviation vers l'Est lors d'une chute libre de grande hauteur ou le pendule de Foucault.

b Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$

Définition : Référentiel ayant pour origine le centre T de la Terre et dans lequel la Terre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles.

Domaine d'utilisation : Adapté à l'étude du mouvement des satellites terrestres (Lune, satellites artificiels).

Repère associé : Origine au centre T de la Terre et trois axes pointant vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes.

Caractère galiléen : Approximativement galiléen pour des expériences de durée bien inférieure à 1 an (période de révolution autour du Soleil). Ce caractère est mis en défaut par le phénomène des marées.

c Le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_c$ et référentiel héliocentrique

Référentiel de Copernic $\mathcal{R}_c$: Référentiel dont le repère cartésien associé a pour origine le centre de masse C du système solaire et dont trois axes pointent vers trois étoiles fixes (le plan (C, X_c, Y_c) définit le plan de l'écliptique). Dans $\mathcal{R}_c$, la Terre est en translation quasi-circulaire autour du Soleil (période 1 an, passage au périgée le 4 janvier). Il est utilisé pour l'étude du mouvement des planètes.

Référentiel de Kepler (ou héliocentrique) : Origine au centre de masse S du Soleil, axes parallèles à ceux de $\mathcal{R}_c$. La distance CS est de l'ordre de $7 \cdot 10^8$ m (comparable au rayon solaire $R_S \approx 7 \cdot 10^8$ m, liée principalement à l'influence de Jupiter de période de révolution d'environ 12 ans).

Le mouvement de la Terre peut ainsi être décomposé en deux mouvements principaux :
- Le mouvement de son centre sur son orbite sous l'action des différents astres (surtout Soleil et Lune) : mouvement annuel ;
- Le mouvement de rotation propre autour de l'axe des pôles : mouvement diurne.

II Deuxième loi de Newton en référentiel non galiléen

Si le référentiel d'étude $\mathcal{R}_{NG}$ (noté également $\mathcal{R}'$, référentiel relatif) n'est pas galiléen, on ne peut plus appliquer directement le principe fondamental de la dynamique sous sa forme habituelle.

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen (absolu) et M un point matériel de masse m soumis à un ensemble de forces extérieures $\vec{f}_k$ de résultante $\vec{F} = \sum_k \vec{f}_k$.

II.1 Les forces d'inertie

Dans $\mathcal{R}$ galiléen, la deuxième loi de Newton s'écrit :

.....

En utilisant la loi de composition des accélérations :

.....

on obtient :

.....

.....

On introduit alors deux grandeurs homogènes à des forces, appelées **pseudo-forces** ou **forces d'inertie** :

.....

.....

Deuxième loi de Newton en référentiel non galiléen

Dans un **référentiel non galiléen** $\mathscr{R}_{NG}$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des **forces extérieures** s'exerçant sur le système plus les forces d'inertie :

$$\frac{d\vec{p}(M/\mathscr{R}_{NG})}{dt} = \sum_i \overrightarrow{f_i} + \overrightarrow{f_{i,\text{ent}}} + \overrightarrow{f_{i,\text{Cor}}}$$

avec

$$\overrightarrow{f_{i,\text{ent}}} = -m\overrightarrow{a_{\text{ent}}}$$

et

$$\overrightarrow{f_{i,\text{Cor}}} = -m\overrightarrow{a_{\text{Cor}}}$$

II.2 Cas de la translation

Lorsque $\mathcal{R}_{NG}$ est en translation par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ ($\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{NG}/\mathcal{R}} = \vec{0}$) :

- L'accélération de Coriolis est nulle : $\vec{a}_{Cor}(M) = \vec{0} \implies \vec{f}_{i,Cor} = \vec{0}$.
- L'accélération d'entraînement est identique pour tous les points du référentiel : $\vec{a}_{ent}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$.

La loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}_{NG}$ s'écrit alors :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_{NG}}(M) = \sum_k \vec{f}_k + \vec{f}_{i,ent} \quad \text{avec} \quad \vec{f}_{i,ent} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}}(O')$$

Application : Pendule simple dans un train uniformément accéléré

On considère un pendule simple de longueur ℓ et de masse m, suspendu au plafond d'un wagon animé d'une accélération horizontale constante $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$ par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On repère la position de la masse M par l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante, en base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

II.3 Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe

Lorsque $\mathcal{R}_{NG}$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe (Δ) de vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ ($\vec{\Omega} = \overrightarrow{\text{cte}}$) par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

Application : Perle sur un cerceau en rotation uniforme

Un cerceau circulaire de centre O et de rayon R tourne autour de son diamètre vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$. Une perle M de masse m glisse sans frottement le long du cerceau. On repère M dans le plan du cerceau par l'angle $\theta = (\vec{u}_{z,\text{desc}}, \overrightarrow{OM})$ en base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée au cerceau.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III Théorème du moment cinétique

III.1 Énoncé

Pour un point matériel M en mouvement dans un **référentiel non galiléen** $\mathcal{R}_{NG}$ sous l'action de forces de résultante $\overrightarrow{F}$, le théorème du moment cinétique en un point A **fixe** donne :

$$\text{TMC} : \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}(M/\mathcal{R}_{NG})}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{f_{i,\text{ent}}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{f_{i,\text{Cor}}})$$

Démonstration : .....

.....

.....

.....

.....

.....

III.2 Cas de la translation

Dans le cas d'une translation de $\mathcal{R}_{NG}$ par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen, $\vec{f}_{i,Cor} = \vec{0}$ et $\vec{f}_{i,ent} = -m\vec{a}_{ent}$.

Exemple du pendule dans la voiture (accélération $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$) :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III.3 Cas de la rotation

Dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe, $\vec{f}_{i,ent} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$ et $\vec{f}_{i,Cor} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_{NG}}(M)$.

Exemple de la perle sur le cerceau :

IV Approche énergétique

IV.1 Théorème de l'énergie cinétique

On obtient ainsi le **théorème de la puissance cinétique** dans $\mathcal{R}_{NG}$:

$$\frac{dE_c(M/\mathcal{R}_{NG})}{dt} = \sum_k \mathcal{P}(\vec{f}_k)_{/\mathcal{R}_{NG}} + \mathcal{P}(\vec{f}_{i,ent})_{/\mathcal{R}_{NG}}$$

Sous forme élémentaire :

$$dE_c(M/\mathcal{R}_{NG}) = \sum_k \delta W(\vec{f}_k)_{/\mathcal{R}_{NG}} + \delta W(\vec{f}_{i,ent})_{/\mathcal{R}_{NG}}$$

Énoncé (Théorème de l'énergie cinétique) : Dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}_{NG}$, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces extérieures et de la force d'inertie d'entraînement entre ces deux instants (la force de Coriolis ne travaille jamais) :

$$E_{c,2}(M/\mathcal{R}_{NG}) - E_{c,1}(M/\mathcal{R}_{NG}) = \sum_k W_{1\to 2}(\vec{f}_k)_{/\mathcal{R}_{NG}} + W_{1\to 2}(\vec{f}_{i,ent})_{/\mathcal{R}_{NG}}$$

IV.2 Théorème de l'énergie mécanique

Énoncé (Théorème de l'énergie mécanique) :

$$dE_m = \delta W(\vec{F}_{NC}) \quad \text{et} \quad \Delta E_m = W_{1\to 2}(\vec{F}_{NC})$$

En particulier, si $\delta W(\vec{F}_{NC}) = 0$, l'énergie mécanique du point matériel dans $\mathcal{R}_{NG}$ se conserve.

a Énergie potentielle d'entraînement dans deux cas particuliers

— **Translation uniformément accélérée ($\vec{a}_{ent} = \vec{a}_0 = \overrightarrow{\text{cte}}$) :**

— **Rotation uniforme autour d'un axe fixe ($\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z = \overrightarrow{\text{cte}}$) :**

.....

.....

.....

.....

.....

b Application : Positions d'équilibre et stabilité de la perle sur le cerceau

Reprenons la perle sur le cerceau en rotation uniforme. Les forces qui travaillent sont le poids $\vec{P}$ et la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{i,ent}$ (car $\delta W(\vec{R}) = 0$ et $\delta W(\vec{f}_{i,Cor}) = 0$). Le système est donc conservatif dans $\mathcal{R}_{NG}$:

— Énergie potentielle de pesanteur : $E_{p,P}(\theta) = mgR(1 - \cos\theta)$;

— Énergie potentielle d'entraînement (avec $HM = R\sin\theta$) :

$$E_{p,ent}(\theta) = -\frac{1}{2}m\Omega^2R^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}m\Omega^2R^2\cos^2\theta + \text{cte}$$

— Énergie potentielle totale :

$$E_p(\theta) = mgR(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}m\Omega^2R^2\cos^2\theta + \text{cte}$$

Recherche des positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) = mgR\sin\theta - m\Omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = mR\sin\theta\left(g - \Omega^2R\cos\theta\right)$$

La condition d'équilibre $\dfrac{dE_p}{d\theta}(\theta_e) = 0$ conduit aux solutions suivantes :

— $\theta_1 = 0$ (position basse du cerceau, existe pour tout Ω) ;

— $\theta_2 = \pi$ (position haute du cerceau, existe pour tout Ω) ;

— $\cos\theta_3 = \dfrac{g}{\Omega^2R}$, qui n'existe que si $\dfrac{g}{\Omega^2R} < 1$, soit $\Omega > \Omega_c = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ (deux positions symétriques $\pm\theta_3$).

Étude de la stabilité : On calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta) = mgR\cos\theta - m\Omega^2R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = mgR\cos\theta - m\Omega^2R^2(2\cos^2\theta - 1)$$

— **Pour $\theta_1 = 0$:** $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) = mgR - m\Omega^2R^2 = mR^2\left(\dfrac{g}{R} - \Omega^2\right)$.

  — Si $\Omega < \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) > 0$: l'équilibre en $\theta_1 = 0$ est **stable**.

  — Si $\Omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) < 0$: l'équilibre en $\theta_1 = 0$ devient **instable**.

— **Pour $\theta_2 = \pi$:** $\dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(\pi) = -mgR - m\Omega^2R^2 < 0$ pour tout Ω : l'équilibre en $\theta_2 = \pi$ est **toujours instable**.

— **Pour** $\cos\theta_3 = \dfrac{g}{\Omega^2 R}$ **(lorsque** $\Omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$**) :**

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_3) = mgR\left(\frac{g}{\Omega^2 R}\right) - m\Omega^2R^2\left(\frac{2g^2}{\Omega^4R^2} - 1\right) = m\Omega^2R^2\left(1 - \frac{g^2}{\Omega^4R^2}\right) > 0$$

Dès qu'elles existent ($\Omega > \Omega_c$), les positions $\pm\theta_3$ sont **stables** (phénomène de bifurcation fourche).

Pulsation des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable θ_e **:** La conservation de l'énergie mécanique $E_m = \dfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta(t)) = \text{cte}$ donne par dérivation :

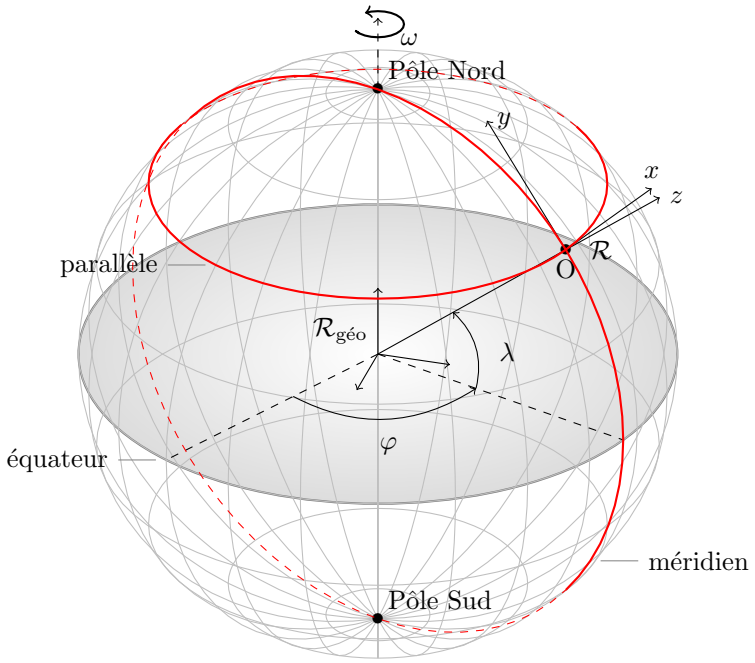
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \implies mR^2\ddot{\theta} + \frac{dE_p}{d\theta}(\theta) = 0$$

Au voisinage de θ_e, un développement de Taylor à l'ordre 1 de $\dfrac{dE_p}{d\theta}$ donne $\dfrac{dE_p}{d\theta}(\theta) \approx \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_e)(\theta - \theta_e)$, d'où l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta_e) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{mR^2}\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_e)$$

V Applications

V.1 Champ de pesanteur



On assimile ici le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ (d'origine T, centre de la Terre) à un référentiel galiléen. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, en rotation uniforme autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T = \Omega_T\vec{u}_z$.

Définition : Le **poids** $\vec{P} = m\vec{g}(M)$ d'un corps de masse m est l'opposé de la force nécessaire pour le maintenir immobile dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ (par exemple la tension $\vec{T}$ d'un fil à plomb).

Pour un point matériel M immobile dans $\mathcal{R}_T$ ($\vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{0}$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{0}$.

. . . . . .

Le **champ de pesanteur** local $\vec{g}(M)$ est donc la somme du champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ et du champ d'accélération centrifuge $\Omega_T^2 \overrightarrow{HM}$ dû à la rotation propre de la Terre :

$$\vec{g}(M) = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega_T^2 \overrightarrow{HM}$$

La **verticale** du lieu est la direction donnée par le fil à plomb, c'est-à-dire la direction et le sens de $\vec{g}(M)$.

Ordres de grandeur numériques :

- Constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$;
- Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$;
- Rayon terrestre : $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$;
- Champ de gravitation au sol : $g_T = \dfrac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} \approx 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- Période de rotation sidérale de la Terre : un jour solaire vaut $T_{\mathrm{sol}} = 24\ \mathrm{h} = 86\,400\ \mathrm{s}$. En 1 an = 365,25 jours solaires, la Terre effectue 366,25 rotations propres par rapport aux étoiles fixes, d'où :

$$T_{\mathrm{sid}} = T_{\mathrm{sol}} \times \frac{365{,}25}{366{,}25} = 23\ \mathrm{h}\ 56\ \mathrm{min}\ 4\ \mathrm{s} = 86\,164\ \mathrm{s} \implies \Omega_T = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{sid}}} \approx 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

- À la latitude λ, la distance à l'axe des pôles vaut $HM = R_T \cos\lambda$, d'où l'accélération centrifuge $\Omega_T^2 HM = \Omega_T^2 R_T \cos\lambda$. Sa valeur maximale à l'équateur ($\lambda = 0$) est $\Omega_T^2 R_T \approx 3{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, soit environ 0,3 % de g_T (expliquant la variation de g entre les pôles, $g \approx 9{,}83\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, et l'équateur, $g \approx 9{,}79\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$).
- L'angle ε entre la verticale locale ($\vec{g}$) et la direction géocentrique ($-\vec{u}_r$) vérifie :

$$\varepsilon \approx \frac{\Omega_T^2 R_T \cos\lambda \sin\lambda}{g_T} = \frac{\Omega_T^2 R_T}{2 g_T} \sin(2\lambda)$$

  Il est maximal à la latitude $\lambda = 45°$, où $\varepsilon_{\max} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad} \approx 0{,}1°$.

V.2 Influence de la force de Coriolis dans le référentiel terrestre

On se place dans le repère local terrestre $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ à la latitude λ dans l'hémisphère Nord, avec :

- $\vec{u}_x$ dirigé vers l'Est ;
- $\vec{u}_y$ dirigé vers le Nord ;
- $\vec{u}_z$ selon la verticale ascendante.

Dans cette base locale, le vecteur rotation de la Terre s'exprime par :

$$\vec{\Omega}_T = \Omega_T \left(\cos\lambda\, \vec{u}_y + \sin\lambda\, \vec{u}_z\right)$$

Application : Voiture roulant vers le Nord

Une voiture de masse m se déplace vers le Nord à la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_y$ avec $v_0 = 120\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} \approx 33\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à la latitude $\lambda = 45°$. Elle subit :

— Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (incluant déjà la force d'inertie d'entraînement) et la réaction de la route $\vec{R}$;

— La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{i,Cor} = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} = -2m\Omega_T(\cos\lambda\,\vec{u}_y + \sin\lambda\,\vec{u}_z) \wedge v_0\vec{u}_y = +2m\Omega_T v_0 \sin\lambda\,\vec{u}_x$$

Dans l'hémisphère Nord ($\lambda > 0$), cette force est dirigée vers l'Est ($\vec{u}_x$), c'est-à-dire vers la droite du mouvement. Son accélération associée vaut :

$$\frac{\|\vec{f}_{i,Cor}\|}{m} = 2\Omega_T v_0 \sin\lambda \approx 2 \times 7{,}3 \cdot 10^{-5} \times 33 \times \sin 45° \approx 3{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \ll g$$

Cet effet est négligeable à l'échelle d'un véhicule, mais devient prépondérant sur de grandes échelles spatiales et temporelles (circulation atmosphérique des vents autour des dépressions et anticyclones, courants océaniques, pendule de Foucault).

V.3 Terme de marée

On étudie ici le mouvement d'un point matériel M au voisinage de la Terre dans le **référentiel géocentrique** $\mathcal{R}_g$ (origine au centre T de la Terre). On considère désormais le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_c$ comme galiléen.

Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_c$. Son accélération d'entraînement est donc l'accélération du centre T de la Terre dans $\mathcal{R}_c$:

$$\vec{a}_{ent}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T) \implies \vec{f}_{i,ent} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T)$$

et la force de Coriolis est nulle ($\vec{f}_{i,Cor} = \vec{0}$).

Le point M est soumis :

— Aux interactions gravitationnelles de la Terre $m\vec{\mathcal{G}}_T(M)$, de la Lune $m\vec{\mathcal{G}}_L(M)$ et du Soleil $m\vec{\mathcal{G}}_S(M)$;

— Aux autres forces éventuelles $\vec{f}$;

— À la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{i,ent} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T)$.

La deuxième loi de Newton dans $\mathcal{R}_g$ s'écrit donc :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}(M) = \vec{f} + m\left[\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + \vec{\mathcal{G}}_S(M)\right] - m\vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T)$$

Or, en appliquant la deuxième loi de Newton à la Terre (de masse M_T) dans le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_c$ galiléen, on a :

$$M_T\vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T) = M_T\vec{\mathcal{G}}_L(T) + M_T\vec{\mathcal{G}}_S(T) \implies \vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T) = \vec{\mathcal{G}}_L(T) + \vec{\mathcal{G}}_S(T)$$

En substituant $\vec{a}_{\mathcal{R}_c}(T)$, on obtient l'équation fondamentale de la dynamique en référentiel géocentrique :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}(M) = \vec{f} + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\underbrace{\left[\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)\right]}_{\vec{\mathcal{C}}_L\ \text{(marée lunaire)}} + m\underbrace{\left[\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{g}_S(T)\right]}_{\vec{\mathcal{C}}_S\ \text{(marée solaire)}}$$

Les termes différentiels $\vec{\mathcal{C}}_L = \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{g}_L(T)$ et $\vec{\mathcal{C}}_S = \vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{g}_S(T)$ constituent les **termes de marée** : ils traduisent l'inhomogénéité des champs gravitationnels de la Lune et du Soleil sur l'étendue du globe terrestre.

Comparaison des ordres de grandeur : Pour un point M situé à la surface de la Terre du côté de l'astre attracteur (à la distance $D - R_T$ de l'astre, où $D \gg R_T$ est la distance Terre-astre) :

$$\mathcal{C} = \mathcal{G}M_{\text{astre}}\left(\frac{1}{(D-R_T)^2} - \frac{1}{D^2}\right) = \frac{\mathcal{G}M_{\text{astre}}}{D^2}\left[\left(1 - \frac{R_T}{D}\right)^{-2} - 1\right] \simeq \frac{2\mathcal{G}M_{\text{astre}}R_T}{D^3}$$

— **Pour la Lune** ($M_L = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, $d_{LT} = 3{,}8 \cdot 10^{8}$ m) :

$$\mathcal{C}_L \simeq \frac{2\mathcal{G}M_L R_T}{d_{LT}^3} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

— **Pour le Soleil** ($M_S = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, $d_{ST} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m) :

$$\mathcal{C}_S \simeq \frac{2\mathcal{G}M_S R_T}{d_{ST}^3} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Bien que l'attraction gravitationnelle directe du Soleil sur la Terre soit beaucoup plus intense que celle de la Lune, le terme de marée décroissant en $1/D^3$, l'influence de la Lune sur les marées terrestres est environ deux fois plus importante que celle du Soleil ($\mathcal{C}_L \approx 2{,}2\,\mathcal{C}_S$).