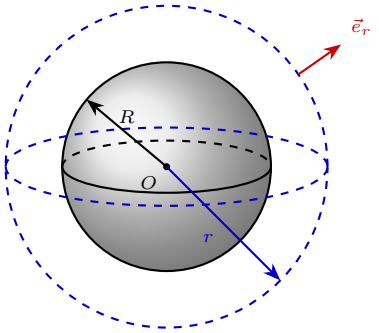
I Volume, surface, contour

I.1 Géométrie sphérique

On considère une situation à symétrie sphérique, un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:
Donner les expressions :



- du vecteur position : $\overrightarrow{OM} =$
- du déplacement élémentaire en sphérique $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:
  $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$
- de la surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ d'une sphère de rayon r :

  $\mathrm{d}\overrightarrow{S} =$ .....
  Bonour comment ca va ?
- de la surface d'une sphère de rayon r : .....

- du volume élémentaire correspond à la coquille sphérique de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$:

  .....

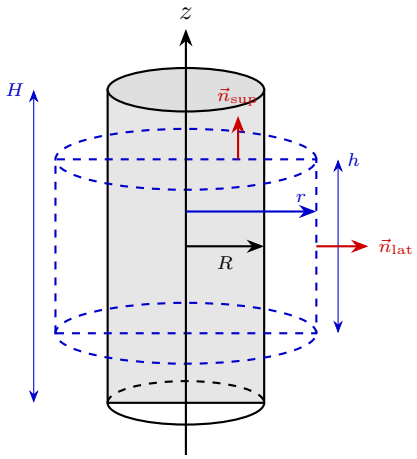
- du volume V de la boule de rayon R : .....

  .....

I.2 Géométrie cylindrique

On considère une situation à symétrie cylindrique, un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

Donner les expressions :



- du vecteur position : $\overrightarrow{OM} =$ .....
- du déplacement élémentaire en cylindrique $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:

  .....

  On considère la surface fermée représentée en pointillés bleus : cylindre de rayon r, de hauteur h fermé par deux disques en haut et en bas.
- de la surface élémentaire sortante pour la paroi latérale du cylindre de rayon r et de hauteur h :

  $\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{lat} =$ .....
- de la surface de la paroi latérale S_{lat} du cylindre de rayon r de hauteur h :

  .....

- de la surface du disque supérieur : .....

  et de sa normale sortante : .....

On considère le cylindre plein de rayon R et de hauteur H.

- du volume élémentaire cylindre creux de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$:

  .....

- du volume V du cylindre de rayon R et de hauteur H : .....

  .....

Rappeler l'expression de la longueur du contour du cercle de rayon r .....

II Champ électrostatique

1. Donner les quatre équations de Maxwell : .....

.....

.....

.....

2. En déduire la loi locale de conservation de la charge électrique.

.....

.....

.....

.....

3. Énoncer le **théorème de Gauss** sous sa forme intégrale en précisant la nature mathématique (ouverte ou fermée, orientée) de la surface de Gauss, notée $\mathcal{S}_G$ et la signification de chaque terme.

.....

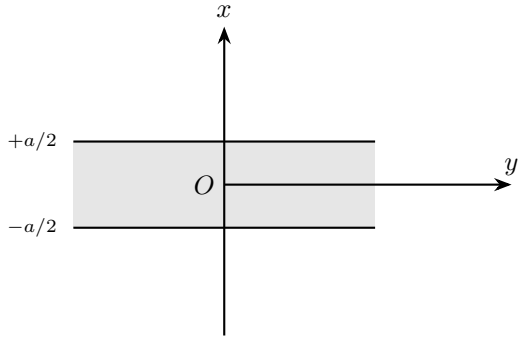
.....

.....

.....

4. On considère une distribution de charges décrite en coordonnées cartésiennes par la densité volumique :

$$\rho(M) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ pour } |x| > \dfrac{a}{2} \\ \rho_0 \text{ pour } |x| < \dfrac{a}{2} \end{array} \right.$$



a) À quelle expression du champ électrique conduisent les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution ? .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Décrire géométriquement la **surface de Gauss** $\mathcal{S}_G$ utilisée (paramètres géométriques, normales sortantes $\vec{n}_{\text{ext}}$ sur chaque face). Faire un schéma.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Calculer le flux sortant $\Phi = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ en fonction de $E(x)$ et des paramètres géométriques.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) Exprimer la charge intérieure Q_{int} contenue dans le volume délimité par $\mathcal{S}_G$ dans les deux cas ($|x| < a/2$ et $|x| > a/2$).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

e) En déduire $\overrightarrow{E}(M)$.

.....

.....

.....

.....

.....

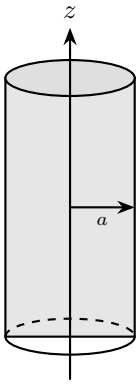
.....

.....

.....

5. On considère une distribution de charges décrite en coordonnées cylindriques par la densité volumique

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 \text{ pour } r > a \\ \rho_0 \text{ pour } r < a \end{cases}$$



a) À quelle expression du champ électrique conduisent les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Décrire géométriquement la **surface de Gauss** $\mathcal{S}_G$ utilisée (paramètres géométriques, normales sortantes $\vec{n}_{\text{ext}}$ sur chaque face). Faire un schéma.

.....

.....

.....

c) Calculer le flux sortant $\Phi = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en fonction de $E(r)$ et des paramètres géométriques.

.....

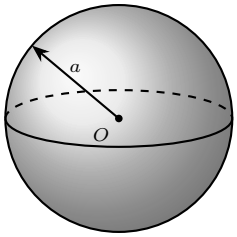
.....

d) Exprimer la charge intérieure Q_{int} contenue dans le volume délimité par $\mathcal{S}_G$ dans les deux cas ($r < a$ et $r > a$).

e) En déduire $\overrightarrow{E}(M)$.

6. On considère une distribution de charges décrite en coordonnées sphériques par la densité volumique :

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 \text{ pour } r > a \\ \rho_0 \left(\dfrac{r}{a}\right) \text{ pour } r < a \end{cases}$$



a) À quelle expression du champ électrique conduisent les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution ?

b) Décrire géométriquement la **surface de Gauss** $\mathcal{S}_G$ utilisée (paramètres géométriques, normales sortantes $\vec{n}_{\text{ext}}$ sur chaque face). Faire un schéma.

c) Calculer le flux sortant $\Phi = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en fonction de $E(r)$ et des paramètres géométriques.

d) Exprimer la charge intérieure Q_{int} contenue dans le volume délimité par $\mathcal{S}_G$ dans les deux cas ($r < a$ et $r > a$).

e) En déduire $\overrightarrow{E}(M)$.

III Champ magnétique

7. On considère une distribution de courants décrite en coordonnées cylindriques par la densité volumique

$$\overrightarrow{j}(M) = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{0} \text{ pour } r > a \\ j_0 \overrightarrow{e_z} \text{ pour } r < a \end{array} \right.$$

a) À quelle forme du champ magnétique conduisent les propriétés de symétrie de cette distribution ? Faire un schéma

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Énoncer le théorème d'Ampère : .....

.....

.....

.....

c) Quel contour doit-on choisir ? .....

.....

d) Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

.....

.....

.....

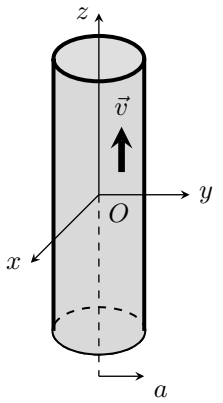
.....

.....

.....

.....

8. Un faisceau de particules est localisé dans un cylindre d'axe Oz et de rayon a.
On note n le nombre de particules par unité de volume, q la charge individuelle des particules et $\vec{v} = v\vec{e_z}$ la vitesse des particules dans le référentiel $\mathcal{R}_L$ du laboratoire.



a. Donner les expressions de la densité volumique de charge ρ et de la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans ce faisceau de particules. En déduire l'intensité $I(r)$ enlacée par le cercle $\mathcal{C}$ d'axe Oz et de rayon r, orienté selon $\vec{e_\theta}$ pour $r \in [0, \infty]$.

.....

.....

.....

.....

.....

b. M étant un point quelconque de l'espace, quelles sont les propriétés des plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$:

— pour les charges et les courants

.....

.....

.....

— pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

.....

.....

.....

c. En déduire la direction du champ magnétique $\vec{B}$.

.....

.....

.....

d. En exploitant les invariances de la distribution par transformations continues, que peut-on dire de $\vec{B}$?

.....

.....

.....

e. Calculer la circulation de $\vec{B}$ sur le cercle $\mathcal{C}$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{e_\theta}$.

.....

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

f. En déduire l'expression de $\vec{B}(M)$

— pour $r < a$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

— pour $r > a$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Champ créé par un solénoïde infini

Calculer le champ magnétostatique à l'intérieur d'un solénoïde infini, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur, ces spires étant parcourues par un courant I.
On admet la nullité du champ à l'extérieur du solénoïde.
Schéma : . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Repère : . . . . . .

. . . . . .

Invariances : . . . . . .

. . . . . .

Symétries : . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Contour d'Ampère : . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Circulation du champ : . . . . . .

.....

.....

.....

Intensité enlacée : .....

.....

Théorème d'Ampère : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV Divers

Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrique créé par une charge ponctuelle q à l'origine O dérive du potentiel $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{OM}\|}$. Exprimer le potentiel $V(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques d'origine O.

.....

.....

Exprimer le champ électrique $\vec{E}(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques d'origine O.

.....

.....

.....
.....

V Dipôle magnétique

7. Extrait du concours ENAC 2018 (questions à choix multiples)

Partie 5 : Moment magnétique

25. Quelles sont les affirmations exactes ?

A) Le champ magnétique à l'intérieur d'une bobine très longue, de forme circulaire, est, loin des bords, uniforme.

B) L'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre est $50\,\mathrm{mT}$.

C) Un moment magnétique est homogène au produit d'une surface par une intensité électrique.

D) La norme du vecteur moment magnétique d'une spire circulaire (diamètre D), parcourue par un courant d'intensité I est $\pi I D^2$

26. Une spire circulaire de diamètre D est placée dans un champ magnétique uniforme de norme B. Quelle est la valeur absolue maximale du flux Φ de ce champ magnétique à travers la spire ?

A) $|\Phi| = BS$ B) $|\Phi| = \dfrac{B}{S}$ C) $|\Phi| = \dfrac{S}{B}$ D) $|\Phi| = 0$

27. La norme du champ magnétique créé par une spire circulaire (diamètre D), parcourue par un courant stationnaire d'intensité I, s'écrit, à une distance $z \gg D$ sur l'axe de la spire :

$$B = \frac{\mu_0}{8z^3} I^\alpha D^\beta$$

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H.m^{-1}}$ et α et β sont deux exposants réels. En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les valeurs de α et β.

A) $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ B) $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ C) $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ D) $\alpha = 2$ et $\beta = 2$

28. La norme du champ magnétique précédent peut s'écrire en fonction de la norme $\mathcal{M}$ du moment magnétique de la spire :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}^\gamma}{z^3}$$

En utilisant l'analyse dimensionnelle, déterminer le facteur numérique γ.

A) $\gamma = \dfrac{1}{2}$ B) $\gamma = 1$ C) $\gamma = -1$ D) $\gamma = 2$

29. Dans le modèle planétaire d'un atome d'hydrogène (modèle de Bohr), l'électron (masse m_e, charge électrique $-e$, où e est la charge électrique élémentaire) décrit une orbite circulaire de rayon r autour d'un axe de révolution qui passe par le proton p. L'axe de révolution est orienté selon Oz (Fig. 2). Le sens de parcours de l'orbite est donné par la figure. En notant T la période de révolution de l'électron, ce système est assimilable à une spire circulaire parcourue par un courant stationnaire d'intensité $I = -e/T$.

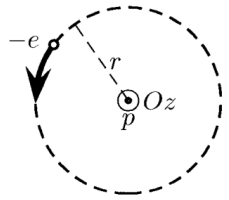


FIG. 2 – *Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène*

Quelle est, d'une part, la composante $\mathcal{M}_z$, selon Oz, du moment magnétique de ce système et, d'autre part, la composante L_z du moment cinétique de l'électron par rapport à son axe de révolution ?

A) $\mathcal{M}_z = -\dfrac{\pi e r^2}{T}$ et $L_z = \dfrac{2\pi r^2 m_e}{T}$

B) $\mathcal{M}_z = \dfrac{\pi e r^2}{T}$ et $L_z = \dfrac{\pi r m_e}{T}$

C) $\mathcal{M}_z = -\dfrac{2\pi e r^2}{T}$ et $L_z = \dfrac{2\pi r^2 m_e}{T}$

D) $\mathcal{M}_z = \dfrac{2\pi e r^2}{T}$ et $L_z = \dfrac{2\pi r m_e}{T}$

30. Le moment cinétique L_z est, en outre, un multiple entier de la constante fondamentale $\hbar = h/(2\pi)$ où h est la constante de Planck : précisément $L_z = n\hbar$ où n est un entier supérieur ou égal à 1. Quelle conséquence cette quantification a-t-elle sur $\mathcal{M}_z$?

A) Il n'y a aucune conséquence particulière.

B) Le moment magnétique est alors quantifié car $\mathcal{M}_z = -n\,\dfrac{e\hbar}{2m_e}$

C) Le moment magnétique est alors quantifié car $\mathcal{M}_z = n\,\dfrac{e\hbar}{m_e}$

D) On ne peut rien dire *a priori*.