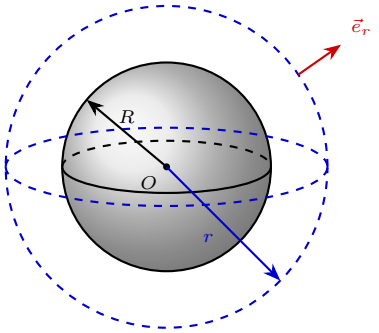
I Volume, surface, contour

I.1 Géométrie sphérique

On considère une situation à symétrie sphérique, un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:
Donner les expressions :

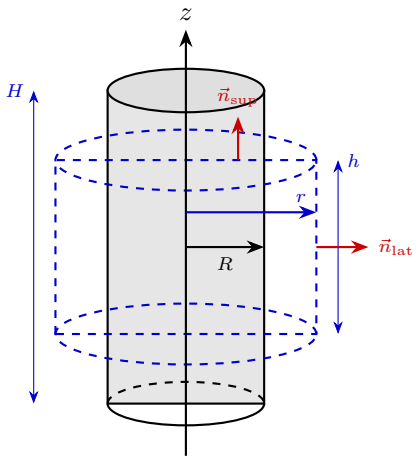


- du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$
- du déplacement élémentaire en sphérique $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:
  $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$
- de la surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ d'une sphère de rayon r ($r = \text{cste}$) :
  $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$
- de la surface d'une sphère de rayon r : $S = \displaystyle\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi r^2$
- du volume élémentaire correspond à la coquille sphérique de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$:
  $\mathrm{d}\tau = S(r)\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$
- du volume V de la boule de rayon R : $V = \displaystyle\int_0^R \mathrm{d}\tau = \int_0^R 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi R^3$

I.2 Géométrie cylindrique

On considère une situation à symétrie cylindrique, un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

Donner les expressions :



- du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$
- du déplacement élémentaire en cylindrique $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:
  $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$

  On considère la surface fermée représentée en pointillés bleus : cylindre de rayon r, de hauteur h fermé par deux disques en haut et en bas.
- de la surface élémentaire sortante pour la paroi latérale du cylindre de rayon r et de hauteur h :
  $\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{\text{lat}} = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_r$
- de la surface de la paroi latérale S_{lat} du cylindre de rayon r de hauteur h :
  $S_{\text{lat}} = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{z_1}^{z_1+h} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 2\pi r h$
- de la surface du disque supérieur : $S_{\text{disque}} = \pi r^2$
  et de sa normale sortante : $\vec{n}_{\text{sup}} = +\vec{e}_z$ (et $\vec{n}_{\text{inf}} = -\vec{e}_z$ pour le disque inférieur)

  On considère le cylindre plein de rayon R et de hauteur H.
- du volume élémentaire cylindre creux de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \mathrm{d}r$:
  $\mathrm{d}\tau = S_{\text{lat}}(r)\,\mathrm{d}r = 2\pi r H\,\mathrm{d}r$
- du volume V du cylindre de rayon R et de hauteur H : $V = \displaystyle\int_0^R \mathrm{d}\tau = \int_0^R 2\pi r H\,\mathrm{d}r = \pi R^2 H$ (base $\times$ hauteur)

Rappeler l'expression de la longueur du contour du cercle de rayon r : $L = 2\pi r$ (périmètre du cercle)

II Champ électrostatique

1. Donner les quatre équations de Maxwell :

• Maxwell-Gauss : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ • Maxwell-flux : $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

• Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ • Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2. En déduire la loi locale de conservation de la charge électrique.

En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \text{ (car } \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = 0)$$

En inversant les dérivées spatiale et temporelle et en utilisant Maxwell-Gauss ($\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$) :

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

3. Énoncer le **théorème de Gauss** sous sa forme intégrale en précisant la nature mathématique (ouverte ou fermée, orientée) de la surface de Gauss, notée $\mathcal{S}_G$ et la signification de chaque terme.

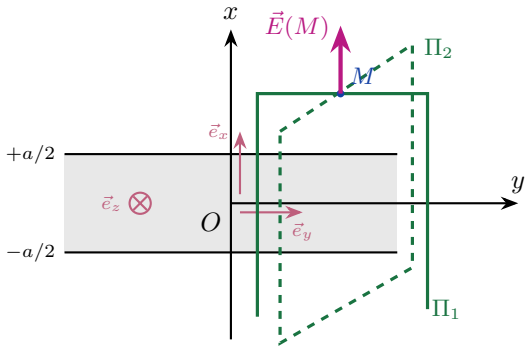
Le flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers toute surface fermée et orientée vers l'extérieur $\mathcal{S}_G$ (appelée surface de Gauss) est égal à la charge électrique totale Q_{int} contenue à l'intérieur du volume délimité par $\mathcal{S}_G$, divisée par ε_0 :

$\Phi_{\mathcal{S}_G}(\vec{E}) = \oiint_{\mathcal{S}_G}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ où $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}_{\text{ext}}$ est le vecteur surface élémentaire orienté vers l'extérieur.

4. On considère une distribution de charges décrite en coordonnées cartésiennes par la densité volumique :

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 \text{ pour } |x| > \dfrac{a}{2} \\ \rho_0 \text{ pour } |x| < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$\mathcal{D} = \left\{M\left(|x| < \frac{a}{2}, y, z\right), \rho_0\right\}$



a) À quelle expression du champ électrique conduisent les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution ?

• **Invariances** : La distribution $\mathcal{D}$ est invariante par toute translation selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend ni de y, ni de z : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x)$.

• **Symétries** : Les plans $\Pi_1 = (M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie pour $\mathcal{D}$, donc pour $\vec{E}(M)$. Ainsi $\vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, soit selon $\vec{e}_x$.

• **Conclusion** : $\vec{E}(M) = E(x)\,\vec{e}_x$.

De plus, le plan $\Pi_3 = (O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ($x = 0$) est un plan de symétrie pour $\mathcal{D}$, donc $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$, d'où $E(-x) = -E(x)$ (fonction impaire) et $\vec{E}(x = 0) = \vec{0}$.

b) Décrire géométriquement la **surface de Gauss** $\mathcal{S}_G$ utilisée (paramètres géométriques, normales sortantes $\vec{n}_{\text{ext}}$ sur chaque face). Faire un schéma.

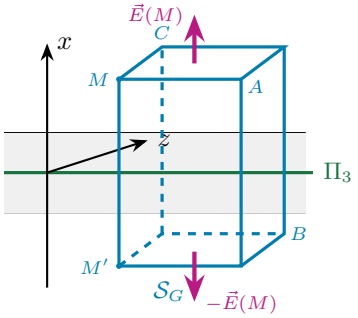
On choisit comme surface de Gauss $\mathcal{S}_G$ un parallélépipède rectangle (ou pavé droit) centré sur le plan $x = 0$, de base carrée de côté b (aire b^2) parallèle à (Oyz) et de hauteur $2|x|$ selon Ox (compris entre $-x$ et $+x$).

Normales sortantes sur les 6 faces :

— Face supérieure ($+x$) : $\vec{n}_{\text{sup}} = +\vec{e}_x$

— Face inférieure ($-x$) : $\vec{n}_{\text{inf}} = -\vec{e}_x$

— 4 faces latérales : $\vec{n}_{\text{lat}} = \pm\vec{e}_y$ ou $\pm\vec{e}_z$



c) Calculer le flux sortant $\Phi = \oiint_{\mathcal{S}_G}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ en fonction de $E(x)$ et des paramètres géométriques.

On décompose le flux sur les 6 faces du pavé :

$$\Phi_{\mathcal{S}_G}(\vec{E}) = \iint_{\text{sup}} E(x)\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e}_x + \iint_{\text{inf}} E(-x)\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}S(-\vec{e}_x) + \underbrace{\iint_{4\text{ lat}} E(x')\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}S\,\vec{n}_{\text{lat}}}_{=0 \text{ car } \vec{e}_x\perp\vec{n}_{\text{lat}}}$$

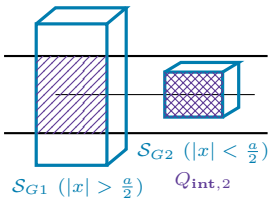
Comme $E(x)$ est uniforme sur les faces à $+x$ et $-x$, et $E(-x) = -E(x)$:

$\Phi_{\mathcal{S}_G}(\vec{E}) = b^2E(x) - b^2E(-x) = 2b^2E(x)$

d) Exprimer la charge intérieure Q_{int} contenue dans le volume délimité par $\mathcal{S}_G$ dans les deux cas ($|x| < a/2$ et $|x| > a/2$).

• **1er cas** : $|x| > \dfrac{a}{2}$ **($\mathcal{S}_{G1}$)** : toute l'épaisseur a de la plaque chargée est incluse dans $\mathcal{S}_{G1}$. Le volume chargé intérieur vaut $\mathcal{V}_1 = a \times b^2$, d'où : $Q_{\text{int},1} = \rho_0 a b^2$

• **2e cas** : $|x| < \dfrac{a}{2}$ **($\mathcal{S}_{G2}$)** : tout le volume de $\mathcal{S}_{G2}$ est chargé (hauteur $2|x|$, section b^2), d'où : $Q_{\text{int},2} = \rho_0 (2|x|) b^2 = 2\rho_0 |x| b^2$



e) En déduire $\overrightarrow{E}(M)$.

D'après le théorème de Gauss, $\Phi_{\mathcal{S}_G}(\vec{E}) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ (en prenant $x > 0$ puis en généralisant par imparité de $E(x)$) :

• **Pour** $|x| > \dfrac{a}{2}$: $2b^2 E(x) = \dfrac{\rho_0 a b^2}{\varepsilon_0} \implies E(x) = \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$ (pour $x > \frac{a}{2}$) et $E(x) = -\dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$ (pour $x < -\frac{a}{2}$)

Soit : $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x$ pour $x > \dfrac{a}{2}$ et $\vec{E}(M) = -\dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x$ pour $x < -\dfrac{a}{2}$.

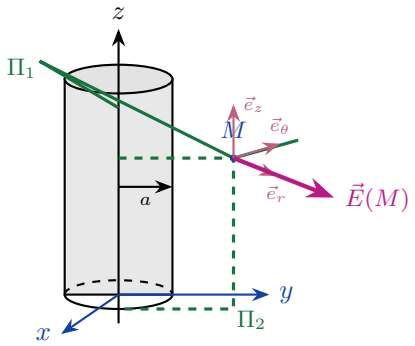
• **Pour** $|x| < \dfrac{a}{2}$: $2b^2 E(x) = \dfrac{2\rho_0 x b^2}{\varepsilon_0} \implies E(x) = \dfrac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 x}{\varepsilon_0}\,\vec{e}_x$.

On vérifie bien la continuité du champ en $x = \pm\dfrac{a}{2}$: $\vec{E}\left(\frac{a}{2}^-\right) = \vec{E}\left(\frac{a}{2}^+\right) = \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x$.

5. On considère une distribution de charges décrite en coordonnées cylindriques par la densité volumique

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 \text{ pour } r > a \\ \rho_0 \text{ pour } r < a \end{cases}$$

$\mathcal{D} = \{M(r < a, \theta, z), \rho_0\}$



a) À quelle expression du champ électrique conduisent les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution ?

• **Invariances** : $\mathcal{D}$ est invariante par toute translation selon $\vec{e}_z$ et par toute rotation autour de (Oz), donc $\vec{E}$ ne dépend ni de z, ni de θ : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

• **Symétries** : Les plans $\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie pour $\mathcal{D}$, donc pour $\vec{E}$. Ainsi $\vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, soit selon $\vec{e}_r$.

• **Conclusion** : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.

b) Décrire géométriquement la **surface de Gauss** $\mathcal{S}_G$ utilisée (paramètres géométriques, normales sortantes $\vec{n}_{\text{ext}}$ sur chaque face). Faire un schéma.

Surface de Gauss $\mathcal{S}_G$: cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur h, fermé par deux disques (supérieur et inférieur). (Voir schéma du I.2).

Normales sortantes : $\vec{n}_{\text{lat}} = +\vec{e}_r$ sur la paroi latérale, $\vec{n}_{\text{sup}} = +\vec{e}_z$ sur le disque du haut et $\vec{n}_{\text{inf}} = -\vec{e}_z$ sur le disque du bas.

c) Calculer le flux sortant $\Phi = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en fonction de $E(r)$ et des paramètres géométriques.

$$\Phi_{\mathcal{S}_G}(\vec{E}) = \iint_{\text{lat}} E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_r + \underbrace{\iint_{\text{sup}} E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_z}_{=0} + \underbrace{\iint_{\text{inf}} E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S(-\vec{e}_z)}_{=0} = 2\pi r h\,E(r)$$

d) Exprimer la charge intérieure Q_{int} contenue dans le volume délimité par $\mathcal{S}_G$ dans les deux cas ($r < a$ et $r > a$).

• **Pour** $r < a$: $Q_{\text{int}} = \rho_0 \pi r^2 h$ • **Pour** $r > a$: $Q_{\text{int}} = \rho_0 \pi a^2 h$

e) En déduire $\overrightarrow{E}(M)$.

D'après le théorème de Gauss, $2\pi r h\,E(r) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$:

• **Pour** $r < a$: $2\pi r h\,E(r) = \dfrac{\pi r^2 h \rho_0}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$

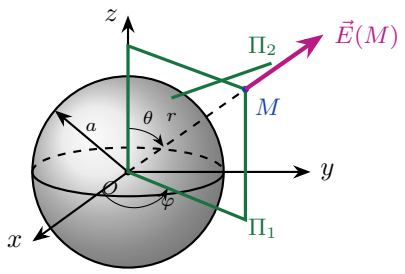
• **Pour** $r > a$: $2\pi r h\,E(r) = \dfrac{\pi a^2 h \rho_0}{\varepsilon_0} \implies \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r}\,\vec{e}_r$

On a bien continuité en $r = a$: $\vec{E}(a^-) = \vec{E}(a^+) = \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$.

6. On considère une distribution de charges décrite en coordonnées sphériques par la densité volumique :

$$\rho(M) = \begin{cases} 0 \text{ pour } r > a \\ \rho_0 \left(\dfrac{r}{a}\right) \text{ pour } r < a \end{cases}$$

(distribution non uniforme)



a) À quelle expression du champ électrique conduisent les propriétés d'invariance et de symétrie de cette distribution ?

• **Invariances** : La distribution de charges est invariante par toute rotation autour de O, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend ni de θ, ni de φ : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

• **Symétries** : Les plans $\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour $\mathcal{D}$, donc pour $\vec{E}$. Ainsi $\vec{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, soit selon $\vec{e}_r$.

• **Conclusion** : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.

b) Décrire géométriquement la **surface de Gauss** $\mathcal{S}_G$ utilisée (paramètres géométriques, normales sortantes $\vec{n}_{\text{ext}}$ sur chaque face). Faire un schéma.

Surface de Gauss $\mathcal{S}_G$: sphère de centre O et de rayon r, de normale sortante $\vec{n}_{ext} = +\vec{e}_r$. (Voir schéma du I.1).

c) Calculer le flux sortant $\Phi = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ en fonction de $E(r)$ et des paramètres géométriques.

$\Phi_{\mathcal{S}_G}(\vec{E}) = \oiint_{\mathcal{S}_G} E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_r = E(r) \oiint_{\mathcal{S}_G} \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r)$

d) Exprimer la charge intérieure Q_{int} contenue dans le volume délimité par $\mathcal{S}_G$ dans les deux cas ($r < a$ et $r > a$).

• **Pour** $r < a$: Q_{int} est la charge portée par la boule de rayon r :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho(r')\,4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \int_0^r \rho_0 \frac{r'}{a} 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{4\pi\rho_0}{a}\left[\frac{r'^4}{4}\right]_0^r = \frac{\pi\rho_0 r^4}{a}$$

• **Pour** $r > a$: $Q_{\text{int}} = Q_{\text{totale}}$ (charge portée par toute la boule de rayon a) :

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{totale}} = \int_0^a \rho_0 \frac{r'}{a} 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r' = \frac{4\pi\rho_0}{a} \cdot \frac{a^4}{4} = \pi\rho_0 a^3$$

e) En déduire $\vec{E}(M)$.

D'après le théorème de Gauss, $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$:

• **Pour** $r < a$: $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{\pi\rho_0 r^4}{a\varepsilon_0} \implies E(r) = \dfrac{\rho_0 r^2}{4a\varepsilon_0} \implies \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 r^2}{4a\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$

• **Pour** $r > a$: $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{\pi\rho_0 a^3}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \dfrac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2} \implies \vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r = \dfrac{Q_{\text{totale}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$

On a bien continuité en $r = a$: $\vec{E}(a^-) = \vec{E}(a^+) = \dfrac{\rho_0 a}{4\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$.

III Champ magnétique

7. On considère une distribution de courants décrite en coordonnées cylindriques par la densité volumique

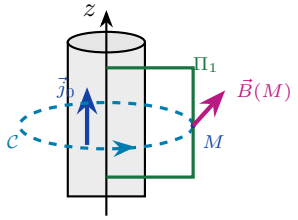
$$\vec{j}(M) = \begin{cases} \vec{0} \text{ pour } r > a \\ j_0\vec{e_z} \text{ pour } r < a \end{cases}$$

a) À quelle forme du champ magnétique conduisent les propriétés de symétrie de cette distribution ? Faire un schéma

• **Invariances** : La distribution de courants $\vec{j}(M)$ est invariante par toute translation selon $\vec{e}_z$ et par toute rotation autour de (Oz), donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

• **Symétries** : Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ contient le vecteur courant $\vec{j}$; c'est donc un plan de symétrie pour la distribution de courants. Le champ magnétique étant un pseudovecteur, $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan de symétrie Π_1 : $\vec{B}(M) \perp \Pi_1$, soit selon $\vec{e}_\theta$.

• **Conclusion** : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.



b) Énoncer le théorème d'Ampère :

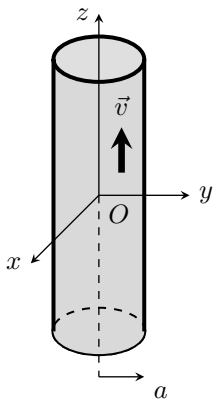
La circulation du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé et orienté $\mathcal{C}$ (appelé contour d'Ampère) est égale au produit de μ_0 par l'intensité algébrique totale $I_{\text{enlacée}}$ des courants traversant une surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur $\mathcal{C}$ (orientée selon la règle de la main droite) :

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$

c) Quel contour doit-on choisir ?
On choisit un cercle $\mathcal{C}$ d'axe (Oz), de rayon r, situé dans un plan orthogonal à (Oz) et orienté dans le sens trigonométrique selon $+\vec{e}_\theta$.

d) Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.
• **Circulation** : Sur $\mathcal{C}$, $\mathrm{d}\vec{\ell} = r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$ et $B(r)$ est constant, donc : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r) r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r B(r)$.
• **Intensité enlacée** : $I_{\text{enlacée}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ avec $\mathrm{d}\vec{S} = r'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_z$.
– Si $r < a$: $I_{\text{enlacée}} = j_0 \pi r^2 \implies 2\pi r B(r) = \mu_0 j_0 \pi r^2 \implies \vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 j_0 r}{2}\,\vec{e}_\theta$.
– Si $r > a$: $I_{\text{enlacée}} = j_0 \pi a^2 \implies 2\pi r B(r) = \mu_0 j_0 \pi a^2 \implies \vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{2r}\,\vec{e}_\theta$.

8. Un faisceau de particules est localisé dans un cylindre d'axe Oz et de rayon a.
On note n le nombre de particules par unité de volume, q la charge individuelle des particules et $\vec{v} = v\vec{e}_z$ la vitesse des particules dans le référentiel $\mathcal{R}_L$ du laboratoire.



a. Donner les expressions de la densité volumique de charge ρ et de la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans ce faisceau de particules. En déduire l'intensité $I(r)$ enlacée par le cercle $\mathcal{C}$ d'axe Oz et de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$ pour $r \in [0, \infty]$.
• Pour $r < a$: $\rho = nq$ et $\vec{j} = \rho\vec{v} = nqv\,\vec{e}_z$ (et $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ pour $r > a$).
• Intensité enlacée par $\mathcal{C}$: $I(r) = \begin{cases} nqv\pi r^2 & \text{si } r \leq a \\ nqv\pi a^2 & \text{si } r \geq a \end{cases}$

b. M étant un point quelconque de l'espace, quelles sont les propriétés des plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:
— pour les charges et les courants
• Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour les charges (ρ) et pour les courants ($\vec{j}$ est contenu dans ce plan).
• Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour les charges (ρ) mais un plan d'antisymétrie pour les courants ($\vec{j} \perp$ à ce plan).

— pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
• $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour $\vec{E}$ ($\vec{E}$ contenu dans ce plan) et d'antisymétrie pour $\vec{B}$ ($\vec{B} \perp$ à ce plan).
• $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour $\vec{E}$ ($\vec{E}$ contenu dans ce plan) et de symétrie pour $\vec{B}$ ($\vec{B}$ contenu dans ce plan).

c. En déduire la direction du champ magnétique $\vec{B}$.
D'après les symétries précédentes, $\vec{B}(M) \perp (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $\vec{B}(M) \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, donc $\vec{B}(M)$ est porté par $\vec{e}_\theta$.

d. En exploitant les invariances de la distribution par transformations continues, que peut-on dire de $\vec{B}$?
Par invariance par translation selon Oz et par rotation autour de Oz, les coordonnées cylindriques de $\vec{B}$ ne dépendent ni de z, ni de θ. Ainsi $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

e. Calculer la circulation de $\vec{B}$ sur le cercle $\mathcal{C}$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$.
$\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(\vec{B}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B(r)\vec{e}_\theta \cdot r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta = 2\pi r B(r)$

f. En déduire l'expression de $\vec{B}(M)$
— pour $r < a$: $2\pi r B(r) = \mu_0 nqv\pi r^2 \implies \vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 nqvr}{2}\,\vec{e}_\theta$
— pour $r > a$: $2\pi r B(r) = \mu_0 nqv\pi a^2 \implies \vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 nqva^2}{2r}\,\vec{e}_\theta$

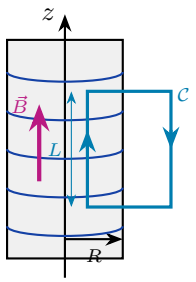
Champ créé par un solénoïde infini

Calculer le champ magnétostatique à l'intérieur d'un solénoïde infini, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur, ces spires étant parcourues par un courant I.
On admet la nullité du champ à l'extérieur du solénoïde.

Repère : Repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ d'axe (Oz) confondu avec l'axe du solénoïde.

Invariances : Solénoïde infini : invariance par translation selon Oz et par rotation autour de $(Oz) \implies \vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Symétries : Pour tout point M, le plan $\Pi = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est orthogonal aux courants $\vec{j} = j_s \vec{e}_\theta$: c'est un plan d'antisymétrie pour les courants, donc un plan de symétrie pour le pseudovecteur $\vec{B}$. Ainsi $\vec{B}(M) \in \Pi$. De plus, l'absence de composante radiale ($\operatorname{div} \vec{B} = 0$) ou l'étude des spires donne $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_z$.



Contour d'Ampère : On choisit un contour rectangulaire $\mathcal{C}$ situé dans un plan méridien $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, de longueur L parallèlement à Oz, avec un côté à l'intérieur du solénoïde ($r < R$) et le côté opposé à l'extérieur ($r' > R$), orienté selon $+\vec{e}_z$ à l'intérieur (règle de la main droite par rapport au sens du courant I).

Circulation du champ : Sur les deux côtés radiaux ($\perp \vec{e}_z$), la circulation est nulle. À l'extérieur, $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Il ne reste que le segment intérieur de longueur L : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = B(r)\,L$.

Intensité enlacée : Sur la longueur L, le contour enlace $N = nL$ spires parcourues chacune par l'intensité I : $I_{\text{enlacée}} = nLI$.

Théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} \implies B(r)\,L = \mu_0 nLI \implies \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 nI\,\vec{e}_z$ (champ uniforme à l'intérieur du solénoïde).

IV Divers

Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrique créé par une charge ponctuelle q à l'origine O dérive du potentiel $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{OM}\|}$. Exprimer le potentiel $V(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques d'origine O.

En coordonnées sphériques d'origine O, $\|\vec{OM}\| = r$, d'où : $V(r, \theta, \varphi) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Exprimer le champ électrique $\vec{E}(r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques d'origine O.

On utilise la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$$

V Dipôle magnétique

Extrait du concours ENAC 2018 (questions à choix multiples – Partie 5 : Moment magnétique)

— **Question 25 : Réponses exactes : A et C.**
- A) Vrai : le champ à l'intérieur d'un solénoïde long (loin des bords) est uniforme ($\vec{B} = \mu_0 nI\,\vec{e}_z$).
- B) Faux : l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre est $50\,\mu$T (et non $50\,$mT).
- C) Vrai : $\vec{\mathcal{M}} = I\,\vec{S}$, donc $[\mathcal{M}] = \mathrm{I} \cdot \mathrm{L}^2$.
- D) Faux : pour une spire de diamètre D (rayon $R = D/2$), $\|\vec{\mathcal{M}}\| = I\pi R^2 = \dfrac{\pi I D^2}{4}$.

— **Question 26 : Réponse exacte : A ($|\Phi| = BS$).**
Le flux vaut $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\theta$, dont la valeur absolue maximale est BS.

— **Question 27 : Réponse exacte : A ($\alpha = 1$ et $\beta = 2$).**
Par comparaison avec le champ créé par un dipôle magnétique sur son axe ($B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}}{z^3}$) et sachant que $\mathcal{M} = I\frac{\pi D^2}{4}$, on obtient bien $B = \frac{\mu_0}{8z^3} I^1 D^2$, soit $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

— **Question 28 : Réponse exacte : B ($\gamma = 1$).**
Comme $[\mathcal{M}] = [I][D]^2$, l'homogénéité de $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}^\gamma}{z^3}$ impose $\gamma = 1$.

— **Question 29 : Réponse exacte : A ($\mathcal{M}_z = -\dfrac{\pi e r^2}{T}$ et $L_z = \dfrac{2\pi r^2 m_e}{T}$).**
- Sur la figure, l'électron tourne dans le sens trigonométrique autour de Oz (sens $+\vec{e}_\theta$), donc sa vitesse est $v = \dfrac{2\pi r}{T} > 0$, et son moment cinétique vaut $L_z = m_e r v = \dfrac{2\pi r^2 m_e}{T}$.
- Comme sa charge est négative ($q = -e$), le courant équivalent vaut $I = -\dfrac{e}{T} < 0$, d'où $\mathcal{M}_z = I\pi r^2 = -\dfrac{\pi e r^2}{T}$.

— **Question 30 :** **Réponse exacte : B ($\mathcal{M}_z = -n\dfrac{e\hbar}{2m_e}$).**

D'après la question 29, $\dfrac{\mathcal{M}_z}{L_z} = -\dfrac{e}{2m_e}$ (rapport gyromagnétique). Avec $L_z = n\hbar$, on en déduit $\mathcal{M}_z = -n\dfrac{e\hbar}{2m_e}$.