

Devoir surveillé n^{o}3

Samedi 21 novembre 2025

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES :

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

Ne pas utiliser de correcteur.

Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

LA CALCULATRICE EST INTERDITE

Première partie

Caractéristique électrique d'un câble coaxial

Données numériques :

Permittivité du vide : $\epsilon_0 \simeq 8,854 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}

Vitesse des ondes EM dans le vide : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ m.s^{-1}

Formulaire :

f étant un champ scalaire et $\overrightarrow{a}$ un champ vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\overrightarrow{a}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{a} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \wedge \overrightarrow{a}$$

$$\text{ch}(u+v)\text{ch}(u-v) = \text{ch}^2 u + \text{sh}^2 v$$

Équations de Maxwell dans le vide : $\begin{cases} \text{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\overrightarrow{B} = 0 & \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$

Le câble, schématisé figure 1, est formé de deux cylindres métalliques, de sections circulaires, coaxiaux et de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Le premier cylindre 1 est plein, c'est l'âme du câble, et le deuxième 2 est creux, c'est la gaine. On supposera les cylindres de très grande conductivité ; les charges et courants électriques qu'ils transportent seront, aux fréquences de travail, considérés comme surfaciques et le champ électromagnétique est nul dans le volume des conducteurs. De plus il ne circule aucun courant sur la surface extérieure de la gaine. L'espace entre les deux cylindres est empli d'un milieu isolant homogène dont les caractéristiques sont supposées indépendantes de la fréquence ; on admettra alors qu'il suffit de remplacer dans toutes les équations de Maxwell ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ où ϵ_r est la permittivité relative de l'isolant.

Données numériques du câble : $\phi_1 = 2\rho_1 = 1,0$ mm, $\phi_2 = 2\rho_2 = 3,5$ mm, $\epsilon_r = 2,25$.

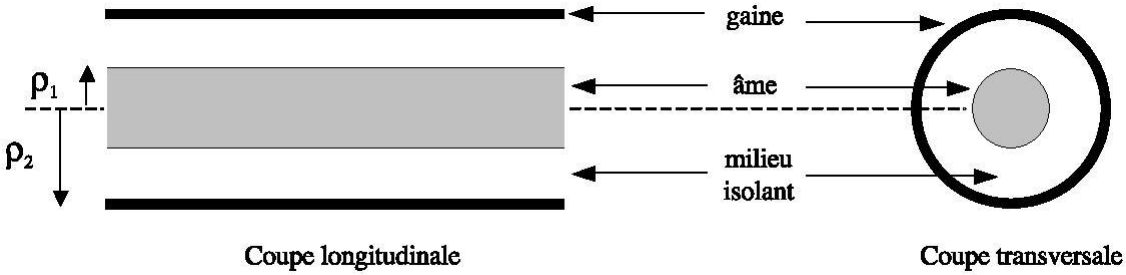


Figure 1 -Schéma du câble coaxial

Un point M entre les cylindres sera repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), Oz étant l'axe des cylindres. On désigne par $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ le repère orthonormé associé.

On cherche dans ces premières questions à identifier quelques quantités électriques caractéristiques du câble.

Capacité linéique. On suppose que l'âme porte la charge λ par unité de longueur.

1. En un point M compris entre les conducteurs, établir l'expression du vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$ en fonction de λ, de ρ et $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$; on négligera tout effet de bord.

2. En déduire l'expression de la différence de potentiel entre les cylindres, $V_1 - V_2$, en fonction de λ, ρ_1 et ρ_2.

3. Exprimer la capacité linéique Γ du câble en fonction de ρ_1 et ρ_2.

4. Calculer la valeur numérique de Γ et celle de $V_1 - V_2$ pour $\lambda = 1$ nC.m^{-1}. À quelle distance de l'axe le champ $\overrightarrow{E}$ prend-il sa valeur maximale E_{max} dans le milieu isolant ? Calculer E_{max}.

Inductance linéique. On suppose le conducteur central parcouru par un courant surfacique continu d'intensité I.

5. Donner l'expression du vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en fonction de I et de ρ en un point M compris entre les conducteurs ; on négligera tout effet de bord.

6. On considère un tronçon de longueur unité limité par deux plans orthogonaux à l'axe. Le flux magnétique propre Φ de ce tronçon est le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers un demi-plan $\theta = \text{Cste}$, limité par les extrémités du tronçon. Trouver l'expression de Φ en fonction de I, ρ_1 et ρ_2.

7. En déduire l'inductance linéique du câble Λ en fonction de ρ_1 et ρ_2.

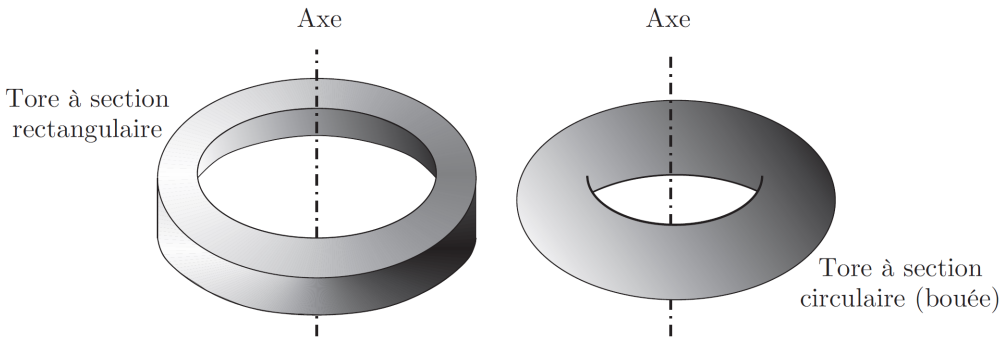
8. Calculer la valeur numérique de Λ. A quelle distance de l'axe le champ $\overrightarrow{B}$ prend-il sa valeur maximale B_{max} dans le milieu isolant ? Calculer B_{max} pour $I = 100$ mA.

9. Si on suppose maintenant que l'intensité I est répartie en volume dans le conducteur central, l'inductance par unité de longueur sera-t-elle modifiée ?

Deuxième partie

De la physique autour d'un tore

Un tore est le volume engendré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\hat{u}_z$) ou d'une flèche dans le cas général ($\overrightarrow{p}$).



A. Étude d'un conducteur ohmique torique

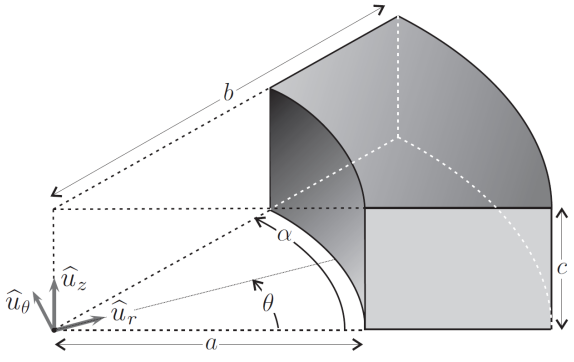


Figure 2 - Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de 10^8 S.m^{-1}. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, d'épaisseur c.
On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

1. Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ. En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ϵ_0 ainsi que la valeur numérique.
2. Établir l'équation vérifiée en régime stationnaire et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V.
3. On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ $\overrightarrow{E}$ et de la densité de courant $\overrightarrow{j}$.
4. Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a, b, c, γ et α.
5. Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L. Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a.

B. Étude d'une pince ampèremétrique

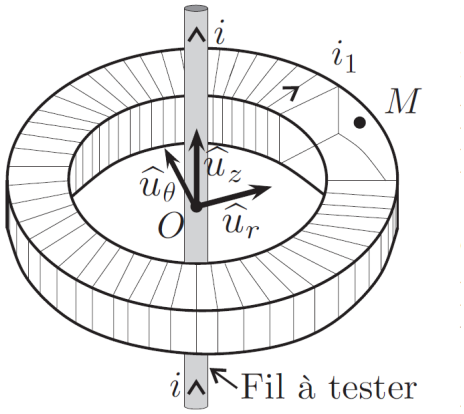


Figure 3 - Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.
Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.
Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, d'épaisseur c, d'axe (O,z). Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ.

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_r + z\,\overrightarrow{u}_z \text{ avec } r \in [a,b] \text{ et } z \in [0,c].$$

Un fil rectiligne infini de même axe (O,z) est parcouru par un courant d'intensité i. On note i_1 l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place en régime stationnaire.

6. Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0, i, i_1, N et r.
7. Calculer le flux Φ de $\overrightarrow{B}$ à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

   On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.
8. Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M, ω, R_p et L.
9. Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

Troisième partie

Étude de la force de van der Waals

Lorsque deux atomes présentant un moment dipolaire électrique sont à distance suffisante, ils interagissent entre eux sous forme d'interaction dipôle – dipôle. Ce problème cherche à expliquer le principe de cette interaction.

Q 1. Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique et de son moment dipolaire $\vec{p}$ (il est conseillé de s'appuyer sur un dessin).

Q 2. Donner un exemple de dipôle électrostatique rencontré dans la nature ainsi que l'ordre de grandeur du moment dipolaire de l'exemple choisi.

Le potentiel électrique d'un dipôle électrostatique placé à l'origine O évalué en un point M situé à grande distance de O s'écrit

$$V(M) = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}.$$

Q 3. À quelle condition peut-on considérer que le point M se trouve à grande distance de O ?

Q 4. Déterminer dans le système de coordonnées sphériques (Figure 1) le champ électrique créé par le dipôle en un point M en fonction des variables $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et θ.

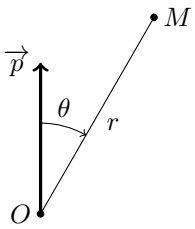


Figure 1

Q 5. Tracer schématiquement sans démonstration les lignes de champ électrostatique associées au dipôle.

Interactions entre atomes de rubidium

Les atomes de rubidium ($Z = 37$) servant à l'étude des interactions de van der Waals, ne possèdent pas de moment dipolaire propre, tout comme l'atome d'hydrogène étudié précédemment. Néanmoins, ils peuvent posséder des moments dipolaires induits et la force qui existe entre deux atomes, résulte de l'interaction entre ces deux moments dipolaires induits.

Q 6. Proposer une explication qualitative de ce phénomène.

Pour modéliser le phénomène, on considère deux dipôles alignés sur un axe (Ox) et espacés d'une distance $x = O_1O_2$ (Figure 2).



Figure 2

Q 7. À partir de l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur, montrer que la force exercée par le premier dipôle sur le second dipôle peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = p_2 \frac{dE_1}{dx} \overrightarrow{e}_x$$

où E_1 est la composante selon $\overrightarrow{e}_x$ du champ électrique créé par le dipôle p_1 à l'abscisse x (au niveau de p_2).

Q 8. En déduire que cette force peut se mettre sous la forme

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = \frac{K}{x^7} \overrightarrow{e}_x$$

où K est une constante dont on précisera le signe.

Q 9. Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Comment pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

Q 10. En déduire l'énergie potentielle d'interaction entre les deux dipôles.

Données et formulaire

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19}$ C

Énergie potentielle d'un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$ dans un champ extérieur $\overrightarrow{E}$

$$E_{\text{pot}} = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}$$

Expression du gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \overrightarrow{u}_\varphi$$

Quatrième partie

Techniques modernes de spectrométrie de masse de molécules complexes

La majorité des questions peuvent être traitées de façon concise.

L'identification de molécules complexes est un enjeu important de la chimie et de la biologie. Cette identification passe souvent par la mesure précise de la masse de la molécule, qui permet de remonter à sa formule chimique brute. Cette mesure s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on arrache un ou plusieurs électrons à la molécule. Dans un deuxième temps, on étudie la trajectoire de l'ion ainsi formé dans un champ électromagnétique, au moyen d'un spectromètre de masse.

Pour chacune de ces deux étapes, diverses techniques sont utilisées. Dans la première partie, nous étudions l'ionisation par électronébuliseur, connue sous l'acronyme anglais ESI, qui a valu à son inventeur, l'américain John Fenn, le prix Nobel de chimie en 2002. Cette technique ionise de très grosses molécules sans les casser, et produit naturellement des ions de charge élevée qui garantissent une mesure plus précise.

I – Ionisation par électronébuliseur

La nébulisation est une méthode électrostatique consistant à appliquer une différence de potentiel élevée (quelques kV) entre l'extrémité d'un petit tube en acier, dit tube capillaire, dans lequel s'écoule très lentement un liquide conducteur contenant la substance à étudier, et une électrode située près de la sortie du tube. Le champ électrique tire sur la surface du liquide sortant du tube qui forme alors un cône presque parfait (figure 1) et stationnaire. Du sommet de ce cône liquide part un fin jet, qui se fragmente ensuite en gouttelettes chargées microscopiques. L'évaporation de ces gouttelettes aboutit à des ions isolés, qui sont envoyés dans le spectromètre.

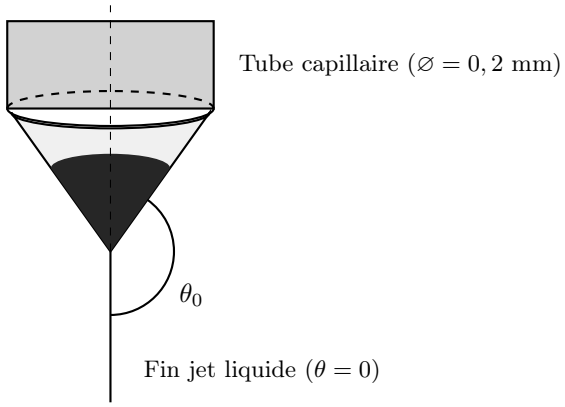


FIGURE 1 – *Illustration d'un électronébuliseur montrant, de haut en bas, le tube capillaire à l'intérieur duquel coule le liquide à étudier (diamètre $0,2$ mm), le cône que forme le liquide sortant du tube sous l'effet de la force électrostatique, et le fin jet issu du sommet du cône, dont la fragmentation produit les ions qui seront envoyés dans le spectromètre de masse.*

Condensateur plan

Nous allons tout d'abord établir l'expression de la force électrostatique exercée sur l'armature d'un condensateur plan.

1. Rappeler la relation entre la densité de charges par unité de surface sur une des armatures, notée σ, et le champ électrique E entre les armatures.
2. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique en fonction de E.
3. En déduire la force par unité de surface, qu'on notera P, exercée sur une des armatures du condensateur, et préciser son sens. On exprimera P en fonction de E, puis en fonction de σ.

Nous admettrons que les expressions de P ainsi obtenues restent valables en tout point de la surface d'un conducteur de forme quelconque dans le cadre de l'électrostatique : P est la force par unité de surface subie par la surface du conducteur.

Goutte chargée sphérique ; critère de stabilité de Rayleigh

Nous étudions maintenant l'effet des forces électrostatiques sur une goutte conductrice sphérique de rayon R, portant une charge Q, sans force extérieure.

4. Déterminer le champ électrique à l'extérieur de la goutte, et en déduire l'expression de P.
5. On admet qu'en tout point de la surface s'exerce en outre une force de cohésion provenant des interactions entre les molécules de la goutte, dite force de tension superficielle. Elle est dirigée vers l'intérieur et vaut par unité de surface γ/R, où γ est un coefficient constant. Montrer que si Q dépasse une valeur limite qu'on exprimera en fonction de R et de γ, la force électrostatique l'emporte sur cette force de cohésion [1]. La goutte se fragmente alors, soit par émission d'un ion, soit en gouttes plus petites : on appelle ce phénomène l'instabilité de Rayleigh.

Cône de Taylor

Nous étudions enfin la formation du cône représenté sur la figure 1 [2].

6. On suppose le débit suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les courants, et on se place dans l'approximation de l'électrostatique. Quelle équation le potentiel électrostatique $V(\vec{r})$ doit-il vérifier dans la région extérieure au cône, supposée vide de charges ? Quelle condition doit-il vérifier sur la surface du cône, constituée d'un liquide conducteur ? On rappelle qu'à l'intérieur d'un conducteur $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ donc V =cte.

On choisit un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centré sur le sommet du cône, tel que la direction du jet corresponde à $\theta = 0$. Dans ce système de coordonnées, l'équation de la surface du cône est $\theta = \theta_0$, avec $\theta_0 > \dfrac{\pi}{2}$ (figure 1).

7. On admet qu'en tout point de la surface du cône s'exerce une force de tension superficielle dirigée vers l'intérieur et proportionnelle à γ/r. Pour que le cône soit à l'équilibre, il faut que la force électrostatique compense exactement la force de tension superficielle en tout point. Comment le module du champ électrique doit-il varier avec r pour cela ?
8. On cherche une solution de l'équation déterminant le potentiel électrostatique de la forme $V(r, \theta, \phi) = V_0 + r^\delta f(\theta)$, où V_0 et δ sont des constantes. Quelle est la valeur de δ compatible avec le résultat de la question 7 ?
9. Expliquer pourquoi l'équation obtenue à la question 6 se ramène à une équation différentielle du second ordre pour $f(\theta)$, qu'on ne cherchera pas à expliciter.
10. Quelle est la valeur de $f(\theta_0)$ compatible avec la condition obtenue à la question 6 ? La résolution numérique de l'équation avec cette condition donne un angle au sommet du cône d'environ $49,3°$.
11. Comment la densité de charge sur la surface du cône varie-t-elle avec r ? Pourquoi est-il plausible que le jet partant de la pointe du cône donne naissance à des gouttelettes de charge élevée ? Ce sont ces gouttelettes qui, en vertu de l'instabilité de Rayleigh, donnent lieu aux ions multichargés qui sont ensuite analysés dans le spectromètre de masse.

1. Une modélisation plus soigneuse, effectuée en 1879 par le physicien britannique Rayleigh (1842-1919), donne une valeur limite plus grande d'un facteur $\sqrt{2}$.
2. Ce phénomène a été modélisé en 1964 par le physicien britannique Taylor (1886-1975).