


# Devoir surveillé n$^o$3

# Samedi 21 novembre 2025

N.B. : vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES :

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.

Ne pas utiliser de correcteur.

Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

LA CALCULATRICE EST INTERDITE

## Première partie

# Autour du théorème de Gauss

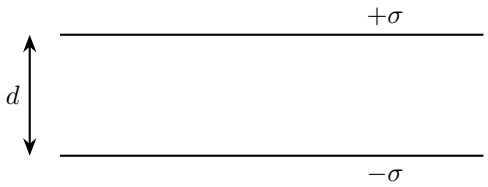
Dans tout le problème, $\varepsilon_0$ représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

### Première partie : Le théorème de Gauss

1. Énoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée $S$ contenant la charge électrique $Q_{\text{int}}$. Donner l'expression de l'équation de Maxwell qui permet de démontrer le théorème de Gauss.

### Deuxième partie : Condensateur plan

2. On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma$ positive. En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma$ est orthogonal au plan. Démontrer que $\vec{E}$ est tel que sa norme $E$ vaut $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur $\vec{E}$ de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.
3. Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance $d$. Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique $\sigma$ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.




   3.1 En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.
   3.2 Déterminer la différence de potentiel $U$ entre les deux plans du condensateur. On exprimera $U$ en fonction de $\varepsilon_0$, $\sigma$ et $d$. Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.
   3.3 Définir et déterminer la capacité $C$ du condensateur par unité de surface. On exprimera $C$ en fonction de $\varepsilon_0$ et $d$.
4. On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur $e$ est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.

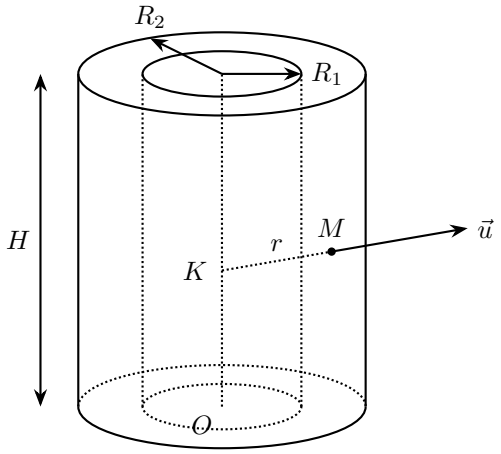



   On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal. Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure $(P)$ et inférieure $(P')$ de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

5. En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge $\sigma_p$ et $\sigma_{p'}$ qui apparaissent sur les surfaces $(P)$ et $(P')$ de la plaque métallique. Exprimer $\sigma_p$ et $\sigma_{p'}$ en fonction de $\sigma$.
6. a. Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre $(P)$ et $(\Pi)$ d'une part et entre $(P')$ et $(\Pi')$ d'autre part). En déduire la différence de potentiel $U'$ entre les deux armatures du condensateur. On exprimera $U'$ en fonction de $\sigma$, $e$, $d$ et $\varepsilon_0$.
   b. En déduire la capacité surfacique $C'$ du condensateur ainsi obtenu. On exprimera $C'$ en fonction de $e$, $d$ et $\varepsilon_0$. Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.

## Troisième partie : Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur $H$ et de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ avec $R_1 < R_2$ et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique $Q > 0$. L'armature externe porte une charge totale $-Q$. Les potentiels électriques des armatures sont respectivement $V_1$ et $V_2$. Soit un point $M$ situé à la distance $r = KM$ de l'axe : $R_1 < r < R_2$. $K$ est la projection orthogonale du point $M$ sur l'axe du condensateur.



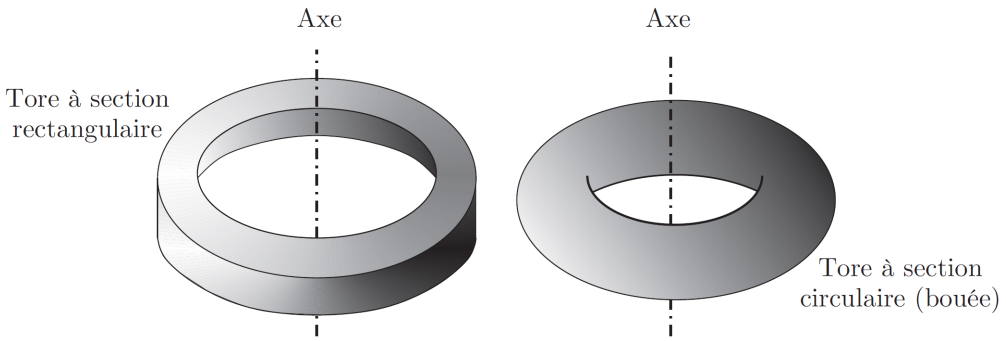

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite $(KM)$ dirigé de $K$ vers $M$. On admettra que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé au point $M$ est radial et sa norme ne dépend que de $r$. On peut donc écrire : $\vec{E} = E(r)\vec{u}$. On néglige les effets de bord.

7. En appliquant le théorème de Gauss à une surface $S$ que l'on précisera, déterminer l'expression de $E(r)$. On exprimera $E(r)$ en fonction de $Q$, $\varepsilon_0$, $r$ et $H$. On distinguera les cas selon que $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$.
8. En déduire le potentiel $V(r)$ à une distance $r$ de l'axe lorsque $R_1 < r < R_2$. On exprimera $V(r)$ en fonction de $Q$, $H$, $V_1$, $R_1$, $\varepsilon_0$ et $r$. En déduire la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux armatures du condensateur en fonction de $Q$, $\varepsilon_0$, $H$, $R_1$ et $R_2$.
9. Déterminer la capacité $C$ du condensateur en fonction de $\varepsilon_0$, $H$, $R_2$ et $R_1$.
10. On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie $u_{\text{él}}$ égale à $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. En utilisant l'expression de $E(r)$ déterminée précédemment et en intégrant l'expression de $u_{\text{él}}$, déterminer l'énergie $W_{\text{cond}}$ accumulée par le condensateur. On exprimera $W_{\text{cond}}$ en fonction de $Q$, $\varepsilon_0$, $H$, $R_1$ et $R_2$. En déduire l'expression de $W_{\text{cond}}$ en fonction de $Q$ et $C$.
11. En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question 9, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques.

## Deuxième partie

# De la physique autour d'un tore

Un tore est le volume engendré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (dans le problème, ce sera un rectangle ou un cercle, voir figure 1) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\hat{u}_z$) ou d'une flèche dans le cas général ($\overrightarrow{p}$).




## A. Étude d'un conducteur ohmique torique

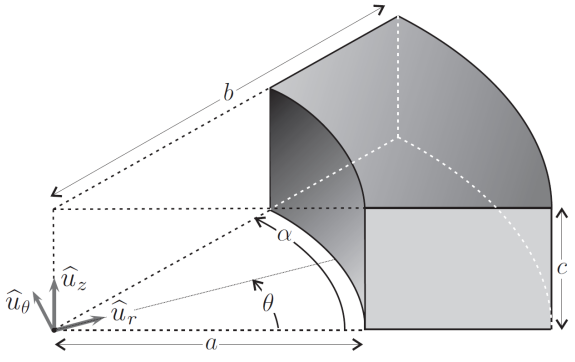



Figure 2 - Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique $\gamma$ de l'ordre de $10^8$ S.m$^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur $a$, de rayon extérieur $b$, d'épaisseur $c$.
On cherche à déterminer la résistance orthoradiale $R$ d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

1. Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge $\rho$. En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée $T$ caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée $\tau$ dont on donnera l'expression en fonction de $\gamma$ et $\epsilon_0$ ainsi que la valeur numérique.
2. Établir l'équation vérifiée en régime stationnaire et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique $V$.
3. On suppose que $V$ ne dépend que de l'angle $\theta$ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ $\overrightarrow{E}$ et de la densité de courant $\overrightarrow{j}$.
4. Déterminer l'expression de l'intensité totale $I$ traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale $R$ en fonction de $a$, $b$, $c$, $\gamma$ et $\alpha$.
5. Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section $S$ et de longueur $L$. Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand $b$ est très proche de $a$.

## B. Étude d'une pince ampèremétrique

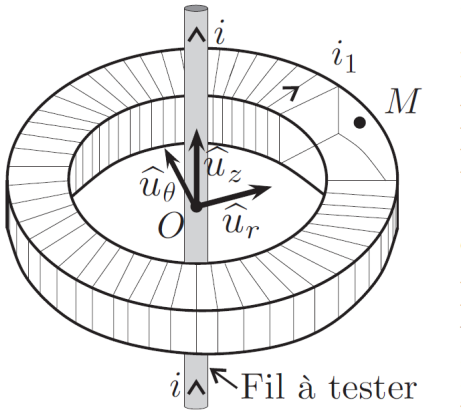



Figure 3 - Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.
Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.
Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant $N$ spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur $a$, de rayon extérieur $b$, d'épaisseur $c$, d'axe $(O,z)$. Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique $\lambda$.

Un point $M$ intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_r + z\,\overrightarrow{u}_z \text{ avec } r \in [a,b] \text{ et } z \in [0,c].$$

Un fil rectiligne infini de même axe $(O,z)$ est parcouru par un courant d'intensité $i$. On note $i_1$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place en régime stationnaire.

6. Montrer qu'au point $M$ intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de $\mu_0$, $i$, $i_1$, $N$ et $r$.
7. Calculer le flux $\Phi$ de $\overrightarrow{B}$ à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance $L$ du bobinage et de mutuelle inductance $M$ entre le fil et le bobinage.

   On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.
8. Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de $M, \omega, R_p$ et $L$.
9. Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

## Troisième partie

# Notre planète Terre

En coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ et avec la base sphérique $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$, un point $M$ est repéré par $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ dans un référentiel d'origine $O$.

Pour une fonction $f(r)$, l'expression de l'opérateur gradient est : $\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u_r}$.

### Données utiles pour l'ensemble du sujet

| Donnée | Valeur $x$ | $\log_{10}(x)$ |
|---|---|---|
| $\pi$ | 3,15 | 0,50 |
| Rayon de la Terre supposée sphérique | $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m}$ | 6,81 |
| Masse de la Terre | $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ | 24,78 |
| Constante d'attraction universelle | $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\text{N.m}^2\text{.kg}^{-2}$ | -10,17 |
| Perméabilité magnétique du vide | $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H.m}^{-1}$ | -5,90 |

Les résultats numériques peuvent être donnés avec un seul chiffre significatif. Pour faire du calcul approché, on pourra utiliser la courbe $\log_{10}(x)$ donnée en annexe, ainsi que les valeurs des $\log_{10}$ pour les données ci-dessus.

## I Champ gravitationnel et champ de pesanteur

1. Donner les expressions des champs gravitationnel $\overrightarrow{G(M)}$ et électrostatique $\overrightarrow{E(M)}$, créés en un point $M$, respectivement par la masse ponctuelle $m$ et par la charge ponctuelle $q$, chacune étant placée en $O$.
   En déduire les analogues gravitationnels de la charge $q$ et de la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0$. En utilisant l'analogie, écrire l'énoncé du théorème de Gauss intégral relatif au champ gravitationnel $\overrightarrow{G(M)}$ créé par une distribution volumique de masse $\mu(P)$ contenue dans un volume $V$ délimité par une surface $S$.

On suppose que la Terre est une sphère homogène de centre $O$, de rayon $R_T$ et de masse volumique uniforme $\mu_T = 5400\,\text{kg.m}^{-3}$.

2. Exprimer le champ gravitationnel $\overrightarrow{G_T(M)}$ créé par la Terre en tout point de l'espace.

Les variations du champ gravitationnel au voisinage du sol terrestre peuvent renseigner sur le contenu du sol. On s'intéresse à la modification du champ gravitationnel terrestre due à un gisement de pétrole, modélisé comme une sphère homogène de rayon $r'$, de centre $C$ et de masse volumique égale à $\mu_p = 900\,\text{kg.m}^{-3}$.

On cherche la variation relative du champ gravitationnel introduite par le gisement de pétrole en un point $M$ situé sur la verticale $OCZ$ du point $C$, à la surface de la Terre, avec la distance $CM$ égale à $CM \approx d$ (**figure 1**).

On note $\overrightarrow{G_T(M)} = G_T(M)\,\overrightarrow{u_z}$ le champ gravitationnel qui régnerait sur la Terre sans la poche de pétrole et $\overrightarrow{G_{Tp}(M)} = G_{Tp}(M)\,\overrightarrow{u_z}$ en présence de la poche de pétrole.

3. En utilisant le principe de superposition, exprimer $G_{Tp}(M)\,\overrightarrow{u_z}$ et la variation relative du champ gravitationnel $\varepsilon = \dfrac{G_T(M) - G_{Tp}(M)}{G_T(M)}$ en fonction de $\mu_T, \mu_P, r', d$ et de $R_T$.

   En présence de pétrole, indiquer avec justification si le champ gravitationnel devient plus intense ou moins intense.

   Faire une estimation numérique de $\varepsilon$, en prenant : $\dfrac{r'}{d} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{r'}{R_T} = \dfrac{10^{-3}}{4}$ et $\dfrac{\mu_P}{\mu_T} = \dfrac{1}{6}$.

   Commenter sachant que les gravimètres actuels ont une précision relative de l'ordre de $10^{-8}$.

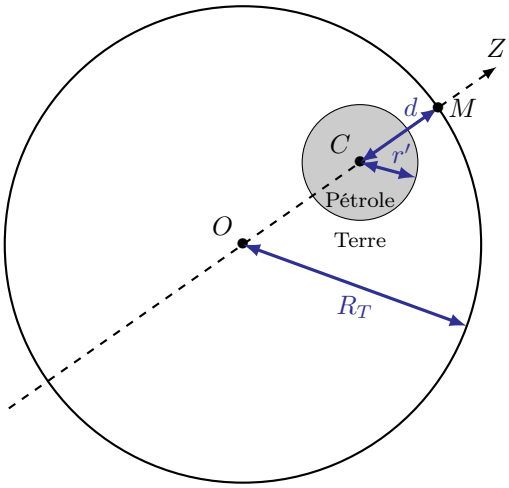



FIGURE 1 – Présence de pétrole dans le sol terrestre

# II Le champ magnétique terrestre

La connaissance du magnétisme terrestre est utile pour étudier les communications électromagnétiques. La protection vis-à-vis de certaines radiations cosmiques par le bouclier magnétique dépend aussi du champ magnétique terrestre.

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui d'un dipôle magnétique $\overrightarrow{m} = -m\,\overrightarrow{u_z}$, placé au centre $O$ de la Terre et porté par l'axe des pôles $OZ$, axe orienté de $S$ vers $N$ (**figure 2**).

On montre que ce dipôle crée en un point $M$, repéré dans la base sphérique par $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$, le champ magnétique donné par l'expression intrinsèque :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(3\,(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{r})\,\overrightarrow{r} - (\overrightarrow{r})^2\,\overrightarrow{m}\right)}{r^5}.$$

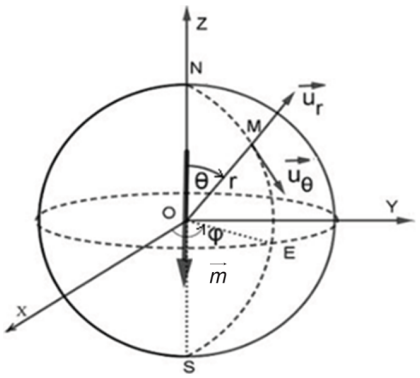
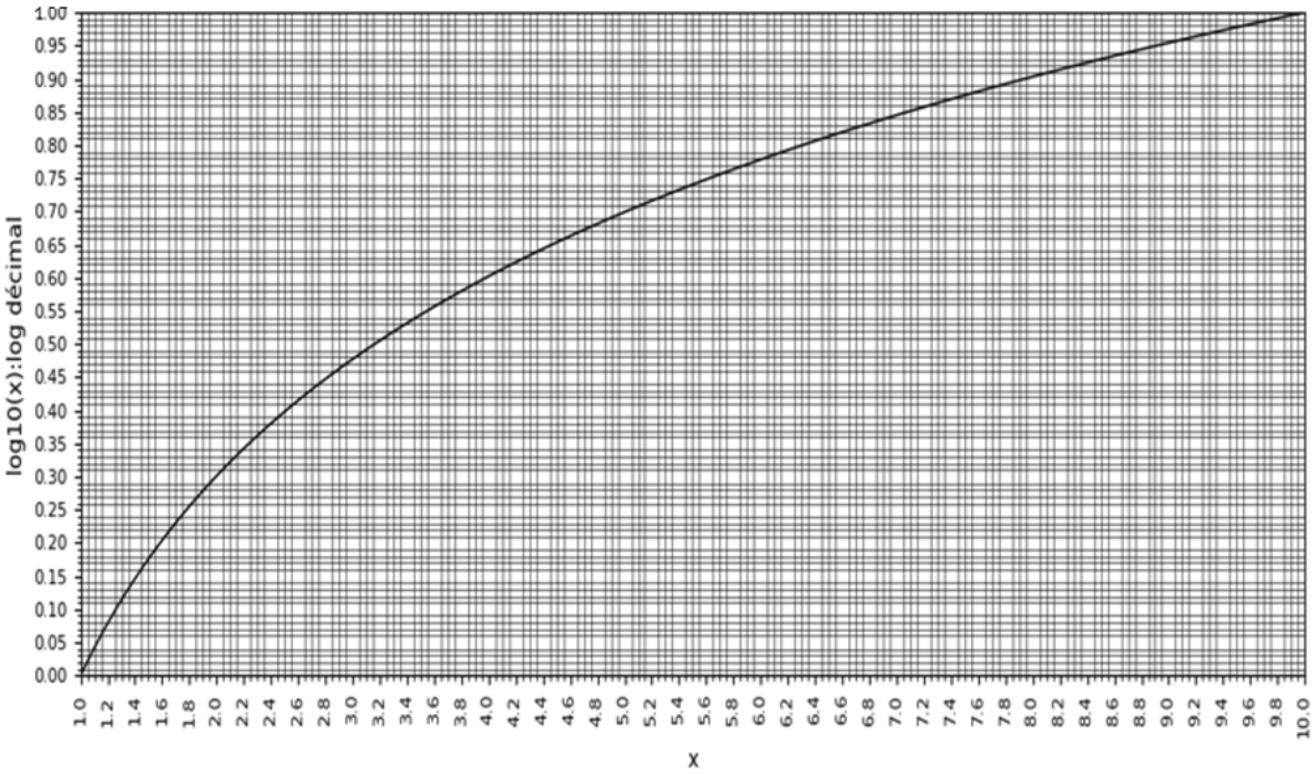



FIGURE 2 – Dipôle magnétique terrestre

4. Donner les trois composantes $(B_r, B_\theta, B_\psi)$ du champ magnétique dans la base sphérique.
5. Déterminer l'équation $r(\theta)$ d'une ligne de champ magnétique et tracer l'allure du graphe d'une ligne de champ dans un plan méridien.
6. En un lieu du sol terrestre de latitude $\Lambda = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, expliciter la composante horizontale $B_h$ et la composante verticale $B_v$ du champ magnétique terrestre en fonction de $m, \Lambda, \mu_0$ et de $R_T$.
7. **Application numérique :** sur le sol de l'équateur, l'intensité du champ magnétique est $B = 2{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$. En déduire une estimation de la valeur $m$ du dipôle magnétique terrestre.

**Annexe**


log10(x):log décimal
x
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0 4.2 4.4 4.6 4.8 5.0 5.2 5.4 5.6 5.8 6.0 6.2 6.4 6.6 6.8 7.0 7.2 7.4 7.6 7.8 8.0 8.2 8.4 8.6 8.8 9.0 9.2 9.4 9.6 9.8 10.0