Dynamique en référentiel non galiléen

Question de cours

- Donner les expressions de la force d'inertie d'entrainement et de a force d'inertie de Coriolis pour les deux types de référentiels mobiles.
- Énoncer les théorèmes fondamentaux de dynamique en référentiel non galiléen : théorème de la quantité de mouvelent, théorème du moment cinétique, théorème de l'énergie/puissance cinétique/mécanique.
- Champ de pesanteur : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur.

Applications directes du cours

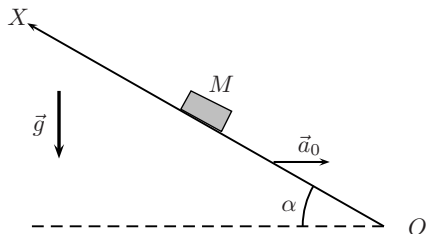
1 Un pendule simple est constitué par une masse ponctuelle m suspendue à un fil de longueur ℓ ; l'autre extrémité de ce fil est fixée en un point O au plafond d'un train. Ce train est animé d'un mouvement de translation rectiligne, parallèle à la direction horizontale (Ox) par rapport au référentiel terrestre galiléen $\mathscr{R}_T$, et d'accélération $\vec{\gamma}$ constante par rapport à $\mathscr{R}_T$.

1. Déterminer l'angle α que fait le fil du pendule avec la direction (Oy), verticale descendante, lorsque le pendule est en équilibre pour un observateur placé dans le train.
2. Cet observateur étudie les oscillations du pendule autour de cette position d'équilibre, dans le plan (xOy). La position du pendule est repérée par l'angle θ du fil et de (Oy). Calculer le moment cinétique du pendule par rapport à O ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans le référentiel lié au train. En déduire la période des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre.

Exercices

1. Caisse sur plan incliné

Un point matériel M, de masse m, peut glisser sans frottement sur un support plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce plan est en mouvement de translation uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a}_0$ horizontale par rapport À un référentiel galiléen. On étudie le mouvement du point M suivant la ligne de plus grande pente (OX).



1. Établir l'expression de l'accélération $\ddot{X}$ du point M relativement au plan incliné.
2. À la date t=0, le point est abandonné sans vitesse initiale par rapport au plan. À quelle condition sur l'angle α le point remonte-t-il la pente ?

2. Caisse dans un camion accéléré

Une caisse assimilée à un point matériel M de masse m est posée sur la plateforme horizontale d'un camion qui a un mouvement rectiligne uniformément accéléré par rapport au sol, considéré comme un référentiel galiléen. Son accélération est $\vec{\gamma}_0 = \gamma_0 \vec{e}_x$. Le système est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. L'action de contact de la plateforme sur la caisse est notée $\vec{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_z$ et satisfait aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f. On note $\mathscr{R}_\mathscr{T}$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathscr{R}_\mathscr{C}$ le référentiel lié au camion.

1. À quelle condition sur γ_0, f et g la caisse ne glisse-telle pas ? En déduire alors les expressions de N et de T.
2. On suppose que la caisse glisse à partir de l'instant $t = 0$.
   (a) Établir l'expression de la vitesse relative de la caisse.
   (b) Établir, dans le référentiel terrestre la puissance des actions de contact du camion sur la caisse $P_{\text{camion}\to\text{caisse}}$. Commenter son signe.
   (c) Établir, dans le référentiel du camion la puissance des actions de contact du camion sur la caisse $P'_{\text{camion}\to\text{caisse}}$. Commenter son signe.
   (d) Former la somme des eux. Conclure.

3. Voiture qui accélère

Une voiture se déplace en ligne droite avec une accélération constante γ. La portière AB est restée ouverte, l'angle initial est $\theta_0 = \pi/2$. Elle est modélisée par une plaque de hauteur h, de largeur $2a$, de masse m uniformément répartie et de moment d'inertie par rapport à son axe de rotation $J = \frac{4}{3}ma^2$. La liaison Az est supposée parfaite.

1. Déterminer l'équation différentielle en $\theta(t)$.
2. En déduire le temps nécessaire à la fermeture de la portière. On donne $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2{,}6$.

4. Horloge embarquée

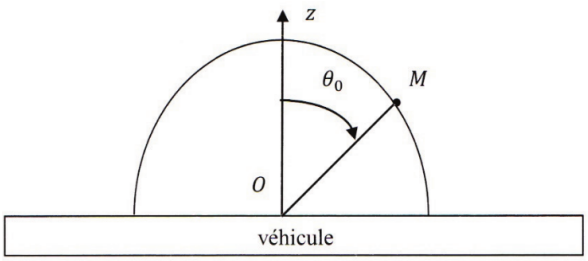
Une horloge est constituée d'un pendule de longueur L, le fil étant sans masse, attaché en O au bout duquel est attachée en M une masse ponctuelle m. Il oscille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On note $\theta(t)$ l'angle que le fil fait avec la verticale à l'instant t. Initialement on a $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ avec $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Quelle est la période T_0 des petites oscillations ? Pour la suite on prend $T_0 = 1,0$ s.
2. Le pendule est maintenant dans un ascenseur qui monte avec une accélération constante $a_0 = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On suppose que les oscillations du pendule sont petites. L'horloge retarde-t-elle ou avance-t-elle par rapport à une horloge restée dans un référentiel galiléen de l'escalier ?
3. Le mouvement de l'ascenseur se décompose maintenant en trois phases :
   — Pendant $\Delta t = 5$ s une accélération constante a_0 vers le haut ;
   — Pendant τ, un mouvement à vitesse constante ;
   — Pendant $\Delta t = 5$ s une accélération constante a_0 vers le bas.

   À la fin, l'horloge placée dans l'ascenseur retarde-t-elle ou avance-t-elle par rapport à une horloge placée dans le référentiel galiléen de l'escalier ?
4. Que se passerait-il si l'ascenseur était en chute libre ?

5. Bille sur véhicule en translation

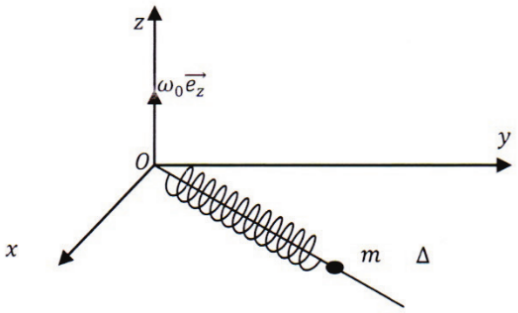
On pose un objet ponctuel M, sans vitesse initiale, sur un support circulaire lié à un véhicule en translation avec une accélération $\vec{\gamma}_0 = \gamma_0 \vec{u}_x$. Le mobile est repéré initialement par l'angle θ_0. On se place dans le champ de pesanteur uniforme, on suppose le référentiel terrestre galiléen, et qu'il y a absence de frottements.



1. Montrer qu'il existe un angle $\theta_0 = \theta_E$ où M est en équilibre relatif.
2. Retrouver la valeur de θ_E par un raisonnement énergétique.
3. Discuter de la stabilité de la position d'équilibre.

6. Ressort tournant

Un anneau glisse sans frottement sur un axe Δ tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire $\omega_0\vec{e}_z$. Il est relié au point O par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



1. Quelles sont les forces exercées sur la masse m ?
2. Discuter du mouvement de l'anneau dans le référentiel tournant en fonction du signe de $\dfrac{k}{m} - \omega_0^2$.
3. Existe-t-il une position d'équilibre stable ?

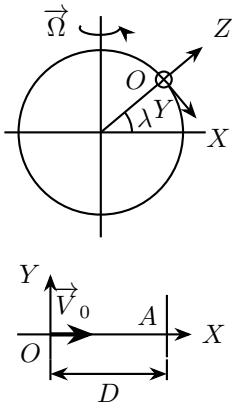
7. Déviation vers l'est

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel à l'altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre.

1. En négligeant l'influence de la force de Coriolis sur le mouvement, établir les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour $h = 150$ m et $g = 9,81$ ms^{-2}.
2. Vérifier le caractère correctif du terme de Coriolis. Exprimer de façon générale la force de Coriolis, et identifier le terme correctif principal donné par cette force.
3. Écrire, au premier ordre de correction, les équations du mouvement avec la force de Coriolis. Vérifier la « déviation vers l'Est »annoncée, et faire l'application numérique à la latitude de 50^o.

8. Déviation d'un palet sur un lac

Un hockeyeur se trouve en un point O, de latitude λ, sur un lac dont la surface est horizontale (on négligera tout frottement). À l'aide de sa crosse, il propulse sur un axe (OX) dirigé vers le Sud, un palet de 300 g à la vitesse initiale v_0 de 10 m $\cdot$ s^{-1} en direction d'un mur vertical situé à une distance $D = 1$ km.
On donne : la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même $\Omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad $\cdot$ s^{-1} et la latitude $\lambda = 51°$ Nord.
D'autre part, le champ de pesanteur terrestre sera supposé constant et dirigé vers le centre de la Terre, et on négligera la force de marée.



1. Étudier le mouvement du palet dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ lié au repère d'espace $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire les équations différentielles du mouvement du palet.

2. Sans aucun calcul, prévoir si le palet touchera le mur à l'Est ou à l'Ouest du point A (intersection de l'axe (OX) avec le mur). En utilisant une méthode de résolution par approximations successives, calculer la déviation algébrique Y lorsque le palet touche le mur.

9. Pendule de Foucault

On s'intéresse au mouvement d'un pendule simple constitué d'une masse $m = 30$ kg suspendue à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $\ell = 67$ m. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point A fixe par rapport au sol, situé à une hauteur égale à ℓ. À l'instant initial, on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 5^o$ dans le plan méridien et on l'abandonne sans vitesse initiale. En un point P de latitude λ, on utilise la base de projection cartésienne $Pxyz$ en prenant Pz selon la direction verticale du lieu et Px dirigé vers l'est.

1. On suppose dans un premier temps que le référentiel terrestre est galiléen.
   (a) Montrer que le mouvement s'effectue dans un plan que l'on précisera.
   (b) Établir l'équation horaire du mouvement par exemple en donnant l'expression de l'angle θ entre le filin et la verticale.
   (c) Calculer les amplitudes maximales des positions, des vitesses et des accélérations dans les deux directions où s'effectuent le mouvement.
2. On tient compte désormais de la rotation de la Terre sur elle même.
   (a) Déterminer la valeur de la vitesse angulaire Ω associée.
   (b) En déduire que le fait de tenir compte de la rotation de la Terre est une correction par rapport au mouvement précédent.
   (c) Expliquer qualitativement pourquoi on peut considérer que le mouvement de ce pendule ne détecte pas la rotation de la Terre à l'équateur.
3. On cherche à écrire les équations du mouvement
   (a) Expliciter dans la base de projection proposée les équations du mouvement.
   (b) En faisant des approximations à justifier à l'aide des questions précédentes, montrer que les équations du mouvement précédent peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y}\sin\lambda + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x}\sin\lambda + \omega_0^2 y = 0 \\ T = mg \end{cases}$$

   (c) On résout ce système en utilisant la notation complexe : on pose $\underline{Z} = x + iy$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{Z}$.
   (d) La résoudre pour obtenir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
   (e) Interpréter physiquement la solution.
4. Cette expérience fut réalisée sous la coupole du Panthéon en 1852 par Léon Foucault (1819-1868) qui mesura une période de 31h 46 minutes.
   (a) Déterminer la durée d'un tour complet du plan d'oscillations à la latitude $48^o51'$ (latitude de Paris). Que penser des résultats obtenus par Foucault ?
   (b) Comparer les périodes à l'équateur, au pôles et à la latitude de 45^o.
   (c) Ce résultat dépend-il de l'hémisphère dans lequel est réalisé l'expérience ?