Meilleure note :
Moyenne :
Médiane :
Écart-type :

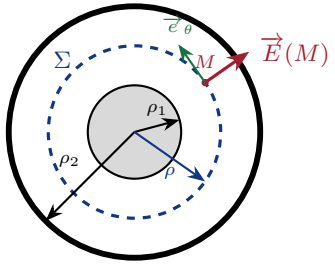
Première partie

Caractéristiques électriques d'un câble coaxial

Extrait de X PC 2006

Capacité linéique

1. Champ électrostatique entre les conducteurs.



— **Invariances :** En négligeant les effets de bord, la distribution de charges est invariante par toute translation le long de l'axe (Oz) et par toute rotation autour de (Oz). Les composantes cylindriques de $\overrightarrow{E}$ ne dépendent donc ni de z, ni de θ :
$|vectE\|(M) =$
$\overrightarrow{E}\|(\rho)$.

— **Symétries :** Pour tout point $M(\rho, \theta, z)$, les plans $\Pi_1 = (M, \overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_z)$ et $\Pi_2 = (M, \overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique appartient donc à leur intersection : $\overrightarrow{E}(M) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, d'où :

$$\overrightarrow{E}(M) = E(\rho)\,\overrightarrow{e}_\rho$$

— **Théorème de Gauss :** On choisit comme surface de Gauss Σ un cylindre fermé d'axe (Oz), de rayon $\rho \in]\rho_1, \rho_2[$ et de hauteur h.

Le flux sortant de $\overrightarrow{E}$ à travers Σ est nul sur les deux bases (car $\overrightarrow{E} \perp \pm\overrightarrow{e}_z$) et uniforme sur la paroi latérale :

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{E}) = \oiint_\Sigma \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 2\pi\rho h\, E(\rho)$$

La charge intérieure contenue dans Σ vaut $Q_{\text{int}} = \lambda h$ (où λ est la charge linéique de l'âme). D'après le théorème de Gauss dans le milieu diélectrique de permittivité

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$:

$$2\pi\rho h\, E(\rho) = \frac{\lambda h}{\varepsilon} \implies \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}\,\overrightarrow{e}_\rho}$$

2. En régime statique, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\,\overrightarrow{e}_\rho$, soit $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}$. En intégrant entre ρ_1 (potentiel V_1) et ρ_2 (potentiel V_2) :

$$V_1 - V_2 = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}\,\mathrm{d}\rho \implies \boxed{V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

3. Par définition, la charge par unité de longueur portée par l'armature interne est $\lambda = \Gamma(V_1 - V_2)$, d'où :

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(\rho_2/\rho_1)} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(\rho_2/\rho_1)}}$$

4. On a $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{\phi_2}{\phi_1} = \dfrac{3{,}5}{1{,}0} = 3{,}5 = \dfrac{7}{2}$, d'où $\ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \ln(7) - \ln(2) \simeq 1{,}9 - 0{,}69 \simeq 1{,}2$.

Avec $\varepsilon_r = 2{,}25 = \dfrac{9}{4}$ et $\varepsilon_0 \simeq 8{,}85 \times 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} :

$$\Gamma = \frac{2\pi \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times 2{,}25}{1{,}21} \simeq \frac{6{,}28 \times 8{,}85 \times 2{,}25}{1{,}21} \times 10^{-12}$$

$$\Gamma \simeq \boxed{1{,}0 \times 10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1} = 100\ \text{pF} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Pour $\lambda = 1{,}0$ nC $\cdot$ m^{-1} $= 10^{-9}$ C $\cdot$ m^{-1} :

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\Gamma} = \frac{10^{-9}}{1{,}0 \times 10^{-10}} = \boxed{10\ \text{V}}$$

La norme $E(\rho) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon\rho}$ est une fonction décroissante de ρ : le champ est donc maximal au voisinage immédiat de l'âme, en $\boxed{\rho = \rho_1 = 0{,}50\ \text{mm}}$:

$$E_{\max} = E(\rho_1) = \frac{V_1 - V_2}{\rho_1 \ln(\rho_2/\rho_1)} \simeq \frac{10}{0{,}50 \times 10^{-3} \times 1{,}21} \simeq \boxed{1{,}6 \times 10^4\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}}$$

Inductance linéique

5. Champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le milieu isolant ($\rho_1 < \rho < \rho_2$)

— **Invariances et symétries :** La distribution de courants $\overrightarrow{j}$ est invariante par translation selon (Oz) et par rotation autour de (Oz), donc $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}(\rho)$. Pour tout point M, le plan méridien $\Pi_1 = (M, \overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_z)$ contient les lignes de courant (dirigées selon $\overrightarrow{e}_z$) : c'est un plan de symétrie pour la distribution de courants, donc un plan d'antisymétrie pour le pseudovecteur $\overrightarrow{B}$. Ainsi $\overrightarrow{B}(M) \perp \Pi_1$, soit :

$$\overrightarrow{B}(M) = B(\rho)\,\overrightarrow{e}_\theta$$

— **Théorème d'Ampère :** On applique le théorème d'Ampère sur un cercle $\mathcal{C}$ d'axe (Oz), de rayon $\rho \in]\rho_1, \rho_2[$, orienté selon $+\overrightarrow{e}_\theta$. L'intensité totale enlacée est celle du conducteur central, soit $I_{\text{enlacée}} = I$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} \implies 2\pi\rho\, B(\rho) = \mu_0 I \implies \boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\overrightarrow{e}_\theta}$$

6. Le demi-plan $\theta = $ cste limité par $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$ et $z \in [0, h]$ (avec $h = 1$ m) a pour vecteur surface élémentaire orienté selon la règle de la main droite $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e}_\theta$. Le flux magnétique propre à travers ce demi-plan vaut :

$$\Phi = \iint \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Pour un tronçon de longueur unité ($h = 1$ m) :

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

7. Par définition du flux propre linéique $\Phi = \Lambda I$, on identifie :

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

8. Avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H $\cdot$ m^{-1} et $\ln(\rho_2/\rho_1) \simeq 1{,}21$:

$$\Lambda = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times 1{,}21 = 2 \times 10^{-7} \times 1{,}21 \simeq \boxed{2{,}4 \times 10^{-7}\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1}}$$

La norme $B(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ est décroissante avec ρ : dans le milieu isolant ($\rho \in [\rho_1, \rho_2]$), le champ est maximal en $\boxed{\rho = \rho_1 = 0{,}50 \text{ mm}}$:

$$B_{\max} = B(\rho_1) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}100}{2\pi \times 0{,}50 \times 10^{-3}} = \frac{2 \times 10^{-8}}{0{,}50 \times 10^{-3}} = \boxed{4{,}0 \times 10^{-5} \text{ T} = 40\,\mu\text{T}}$$

9. Si le courant est volumique dans l'âme, l'inductance linéique Λ sera modifiée (elle augmentera). En effet, lorsque le courant est uniquement surfacique, le champ magnétique est nul à l'intérieur de l'âme ($\rho < \rho_1$). Si le courant est réparti en volume dans l'âme ($\rho \in [0, \rho_1]$), il règne un champ magnétique non nul à l'intérieur du conducteur central ($B(\rho) = \dfrac{\mu_0 I \rho}{2\pi\rho_1^2}$ pour une répartition uniforme), ce qui ajoute une contribution positive (inductance interne, égale à $\dfrac{\mu_0}{8\pi}$ pour un courant uniforme) à l'énergie magnétique stockée et donc au flux propre linéique.

Deuxième partie

De la physique autour d'un tore

D'après Mines Ponts MP 2014

I Étude d'un conducteur ohmique torique

1. Dans un conducteur ohmique de conductivité γ, on associe :

— l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$;

— l'équation locale de conservation de la charge : $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$;

— la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

En substituant $\vec{j}$ dans l'équation de conservation de la charge (le conducteur étant homogène, γ est uniforme) :

$$\gamma\,\text{div}\,\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0}$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit $\rho(M,t) = \rho(M,0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, où le temps caractéristique de relaxation diélectrique vaut :

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}} \simeq \frac{8{,}85 \times 10^{-12}}{10^8} \simeq \boxed{10^{-19} \text{ s}}$$

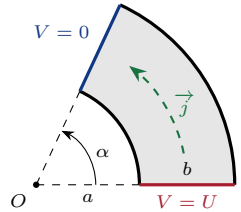
Après une perturbation, la densité volumique retourne à la valeur 0 en un temps de l'ordre de τ.
Pour tout phénomène évoluant sur une durée caractéristique $T \gg \tau$ (ce qui est toujours vérifié en électromagnétisme macroscopique), toute densité volumique de charge initiale disparaît quasi instantanément : on a donc $\boxed{\rho \simeq 0}$ en volume dans le conducteur.

2. En régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$, ce qui assure l'existence d'un potentiel scalaire V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$. D'après

l'équation de Maxwell-Gauss et le résultat $\rho = 0$ établi précédemment :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}\left(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V\right) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \implies \boxed{\Delta V = 0} \quad \text{(équation de Laplace)}$$

3. Comme V ne dépend que de θ, l'équation de Laplace $\Delta V = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$ se réduit à $\dfrac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} = 0$, dont la solution générale est $V(\theta) = A\theta + B$.



Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} V(0) = B = U \\ V(\alpha) = A\alpha + B = 0 \implies A = -\dfrac{U}{\alpha} \end{cases}$$

On en déduit le potentiel, le champ électrique et la densité de courant :

$$\boxed{V(\theta) = U\left(1 - \frac{\theta}{\alpha}\right)}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\,\widehat{u}_\theta = \frac{U}{\alpha r}\,\widehat{u}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{\gamma U}{\alpha r}\,\widehat{u}_\theta}$$

4. L'intensité traversant une section rectangulaire droite quelconque du tore est égale au flux de $\vec{j}$ à travers cette section. Une section droite rectangulaire à angle θ fixé ($r \in [a,b]$ et $z \in [0,c]$) a pour vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\widehat{u}_\theta$. L'intensité totale traversant cette section vaut :

$$I = \iint_{\text{section}} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^c \mathrm{d}z \int_a^b \frac{\gamma U}{\alpha r}\,\mathrm{d}r = \frac{\gamma U c}{\alpha}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Par identification avec la loi d'Ohm $U = RI$, la résistance orthoradiale du tore tronqué vaut :

$$\boxed{R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln(b/a)}}$$

5. Pour un conducteur filiforme homogène de longueur L et de section droite S, la résistance vaut $R_{\text{fil}} = \dfrac{L}{\gamma S}$.

Lorsque $b \to a$, posons $b = a + e$ avec $e = b - a \ll a$. Au premier ordre en e/a :

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \simeq \frac{b-a}{a}$$

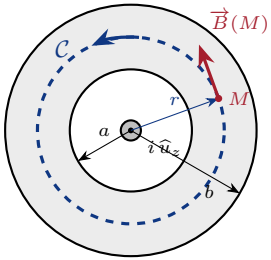
On obtient alors :

$$R \simeq \frac{\alpha}{\gamma c\left(\frac{b-a}{a}\right)} = \frac{a\alpha}{\gamma\, c(b-a)}$$

Or $L = a\alpha$ correspond à la longueur de l'arc moyen de rayon a et d'angle α, tandis que $S = c(b-a)$ représente l'aire de la section rectangulaire droite. On retrouve bien l'expression classique $\boxed{R \simeq \dfrac{L}{\gamma S}}$.

II Étude d'une pince ampèremétrique

6.



— **Symétries et invariances :** En modélisant les N spires serrées du bobinage torique par une nappe de courant orthoradiale axisymétrique (et en tenant compte du fil central parcouru par $i\,\widehat{u}_z$), la distribution totale des courants est invariante par toute rotation autour de l'axe (O,z). De plus, pour tout point $M(r,\theta,z)$ intérieur au tore, le plan méridien $\Pi = (M, \widehat{u}_r, \widehat{u}_z)$ contient le fil central ainsi que les courants de spire locaux : Π est un plan de symétrie des courants, donc un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$. Ainsi $\vec{B}(M) \perp \Pi$, soit :

$$\vec{B}(M) = B(r,z)\,\widehat{u}_\theta$$

— **Théorème d'Ampère :** On applique le théorème d'Ampère le long d'un cercle $\mathcal{C}$ d'axe (O,z) et de rayon $r \in]a,b[$, orienté selon $+\widehat{u}_\theta$. Le disque s'appuyant sur $\mathcal{C}$ est traversé une fois par le fil central (intensité $+i$) et N fois par les spires

du bobinage (intensité $+Ni_1$ d'après la règle de la main droite sur la figure 3). L'intensité totale enlacée vaut donc $I_{\text{enlacée}} = i + Ni_1$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

$$\implies 2\pi r\, B(r,z) = \mu_0(i + Ni_1) \implies \boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0(i+Ni_1)}{2\pi r}\,\widehat{u}_\theta}$$

On constate que B est indépendant de z : $\overrightarrow{B} = B(r)\,\widehat{u}_\theta$.

7. Le flux φ de $\overrightarrow{B}$ à travers une seule spire rectangulaire ($r \in [a,b]$, $z \in [0,c]$, de normale $+\widehat{u}_\theta$) vaut :

$$\varphi = \iint_{\text{spire}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_0^c \mathrm{d}z \int_a^b \frac{\mu_0(i+Ni_1)}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)(i+Ni_1)$$

Le flux total à travers les N spires en série du bobinage vaut $\Phi = N\varphi$:

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) i_1 + \frac{\mu_0 N c}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) i}$$

Par identification avec la relation de définition $\Phi = Li_1 + Mi$, on obtient :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{M = \frac{\mu_0 N c}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

8. Chaque spire rectangulaire a un périmètre $p = 2(b-a+c)$, d'où une longueur totale de fil $\ell = Np = 2N(b-a+c)$ et une résistance totale du bobinage $R_b = \Lambda\ell$ (notée R_p dans l'énoncé).

Le bobinage étant fermé sur lui-même (en court-circuit), la loi des mailles en régime variable s'écrit avec la loi de Faraday ($e_{\text{ind}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$) :

$$R_p i_1 = e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

En notation complexe ($\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \mathrm{j}\omega$) :

$$(R_p + \mathrm{j}L\omega)\underline{i}_1 = -\mathrm{j}M\omega\,\underline{i} \implies \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = -\frac{\mathrm{j}M\omega}{R_p + \mathrm{j}L\omega}}$$

9. Pour que le dispositif fonctionne en pince ampèremétrique, le courant mesuré $\underline{i}_1$ doit être directement proportionnel au courant inconnu $\underline{i}$ indépendamment de la fréquence (réponse linéaire sans déphasage ni distorsion). Cela est réalisé en **haute fréquence**, lorsque $L\omega \gg R_p$, soit $\omega \gg \omega_c = \dfrac{R_p}{L}$. Dans ce régime :

$$\underline{H} \simeq -\frac{\mathrm{j}M\omega}{\mathrm{j}L\omega} = -\frac{M}{L} = -\frac{1}{N} \implies i_1(t) \simeq -\frac{i(t)}{N}$$

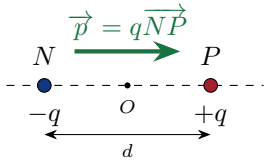
La mesure de $i_1(t)$ permet alors de remonter directement à l'intensité $i(t) = -Ni_1(t)$ dans le fil testé.

Troisième partie

Étude de la force de Van de Waals

Extraits de Centrale PC 2020

Q1. Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges ponctuelles opposées $-q$ (placée en un point N) et $+q$ (placée en un point P), séparées d'une distance $d = NP$. Son moment dipolaire électrique est le vecteur orienté de la charge négative vers la charge positive :



$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{NP}} \quad \text{(en C} \cdot \text{m)}$$

Q2. Exemple : La molécule de chlorure d'hydrogène (HCl) ou la molécule d'eau (H_2O) possèdent un moment dipolaire permanent. Pour HCl, la distance interatomique est $d \simeq 1{,}3 \times 10^{-10}$ m et la charge partielle vaut $\delta \simeq 0{,}17\,e$, ce qui donne un moment dipolaire de l'ordre de $p \simeq 3{,}6 \times 10^{-30}$ C · m $\simeq$ 1,1 D (soit typiquement $\boxed{p \sim 10^{-30} \text{ à } 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}}$).

Q3. L'expression $V(M) = \dfrac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 \|\overrightarrow{OM}\|^3}$ est valable dans le cadre de l'approximation dipolaire, c'est-à-dire lorsque la distance d'observation $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ est très grande devant la taille caractéristique $d = NP$ du dipôle : $\boxed{r \gg d}$.

Q4. Avec $\overrightarrow{p} = p\,\widehat{u}_z = p(\cos\theta\,\widehat{u}_r - \sin\theta\,\widehat{u}_\theta)$ et $\overrightarrow{OM} = r\,\widehat{u}_r$, le potentiel s'écrit :

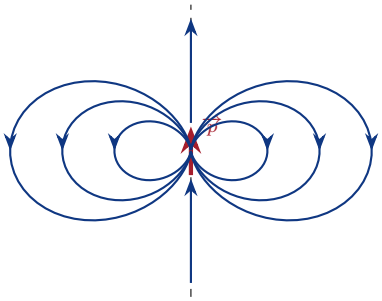
$$V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Le champ électrostatique dérive de ce potentiel par $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$:

$$\overrightarrow{E}(M) = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\widehat{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\widehat{u}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}_{=0}\,\widehat{u}_\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,(2\cos\theta\,\widehat{u}_r + \sin\theta\,\widehat{u}_\theta)}$$

Q5. Lignes de champ :



Q6. Bien que l'atome de rubidium soit électriquement neutre et sans moment dipolaire permanent en moyenne temporelle, le mouvement quantique permanent des électrons autour du noyau engendre à chaque instant un moment dipolaire instantané $\overrightarrow{p}_1(t)$ fluctuant. Ce dipôle instantané crée un champ électrique $\overrightarrow{E}_1$ qui déforme le nuage électronique d'un atome voisin, y induisant un moment dipolaire induit $\overrightarrow{p}_2(t) = \alpha\varepsilon_0\overrightarrow{E}_1$ colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{E}_1$. L'interaction entre $\overrightarrow{p}_1(t)$ et $\overrightarrow{p}_2(t)$ résulte en une force attractive non nulle en moyenne temporelle (interaction de London).

Q7. L'énergie potentielle d'interaction du dipôle $\overrightarrow{p}_2 = p_2\,\overrightarrow{e}_x$ placé dans le champ extérieur $\overrightarrow{E}_1$ créé par le dipôle 1 vaut :

$$E_{\text{pot}} = -\overrightarrow{p}_2 \cdot \overrightarrow{E}_1(x) = -p_2 E_1(x)$$

En considérant le dipôle $\overrightarrow{p}_2$ fixé (on dérive uniquement par rapport à la position x du centre O_2 du dipôle 2), la force subie par le dipôle 2 s'obtient par $\overrightarrow{F}_{1/2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_{\text{pot}}$:

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{pot}}}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e}_x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-p_2 E_1(x)\right)\overrightarrow{e}_x \implies \boxed{\overrightarrow{F}_{1/2} = p_2\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e}_x}$$

Q8. Le dipôle $\overrightarrow{p}_1 = p_1\,\overrightarrow{e}_x$ est situé en O_1 et le point O_2 se trouve sur son axe ($\theta = 0$, $r = x > 0$). D'après la question Q4, le champ électrique créé par $\overrightarrow{p}_1$ en O_2 vaut :

$$\overrightarrow{E}_1(x) = \frac{2p_1}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\,\overrightarrow{e}_x \implies E_1(x) = \frac{p_1}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$

Ce champ induit sur le second atome (de polarisabilité α) un moment dipolaire proportionnel au champ : $p_2 = \alpha\varepsilon_0 E_1(x) = \dfrac{\alpha p_1}{2\pi x^3}$. En reportant dans l'expression

de la force :

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = p_2 \frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e}_x = \left(\frac{\alpha p_1}{2\pi x^3}\right)\left(-\frac{3p_1}{2\pi\varepsilon_0 x^4}\right)\overrightarrow{e}_x = -\frac{3\alpha p_1^2}{4\pi^2\varepsilon_0 x^7}\,\overrightarrow{e}_x$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1/2} = \frac{K}{x^7}\,\overrightarrow{e}_x} \quad \text{avec} \quad \boxed{K = -\frac{3\alpha p_1^2}{4\pi^2\varepsilon_0} < 0}$$

Q9. Comme $K < 0$, la force $\overrightarrow{F}_{1/2}$ est dirigée selon $-\overrightarrow{e}_x$ (de O_2 vers O_1) : l'interaction est donc attractive.

Prévision sans calcul : Le champ $\overrightarrow{E}_1$ créé par $\overrightarrow{p}_1$ est orienté dans le même sens que $\overrightarrow{p}_1$ et son intensité décroît lorsque la distance x augmente. Le dipôle induit $\overrightarrow{p}_2$ s'aligne dans le sens du champ $\overrightarrow{E}_1$: son extrémité négative $(-q)$ est donc plus proche de O_1 que son extrémité positive $(+q)$, subissant ainsi une attraction plus forte que la répulsion exercée sur $+q$. Le bilan est nécessairement attractif.

Q10. La force dérivant de l'énergie potentielle d'interaction par $F_{1/2,x} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{K}{x^7}$, on obtient par intégration (en choisissant $E_p(\infty) = 0$) :

$$E_p(x) = -\int \frac{K}{x^7}\,\mathrm{d}x = \frac{K}{6x^6} \implies \boxed{E_p(x) = \frac{K}{6x^6} = -\frac{\alpha p_1^2}{8\pi^2\varepsilon_0 x^6} < 0}$$

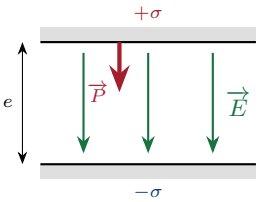
Quatrième partie

Ionisation par électronébuliseur

Extrait de X PC 2026

Condensateur plan

1. Entre les deux armatures planes infinies portant les densités surfaciques $+\sigma$ et $-\sigma$, le champ électrique est uniforme, orthogonal aux armatures, dirigé de l'armature positive vers l'armature négative, et sa norme vaut :



$$\boxed{E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}}$$

2. Dans le vide, la densité volumique d'énergie électrostatique vaut :

$$\boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

3. Pression électrostatique P exercée sur une armature

— *Méthode énergétique :* Considérons un condensateur plan d'aire S et d'épaisseur e dont les armatures portent des charges fixes $+Q = +\sigma S$ et $-Q = -\sigma S$. L'énergie électrostatique stockée dans le volume Se vaut $\mathcal{E}_e = u_e Se = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Se = \dfrac{\sigma^2 Se}{2\varepsilon_0}$. Lors d'un déplacement virtuel de de l'armature supérieure à charge constante, la force électrostatique F_e exercée sur cette armature vérifie $\mathrm{d}\mathcal{E}_e = -F_e\,\mathrm{d}e$, d'où :

$$F_e = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_e}{\mathrm{d}e} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S$$

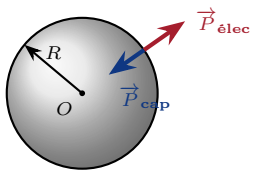
— *Sens et expression de la pression électrostatique :* Les deux armatures portant des charges de signes opposés, elles s'attirent : la force par unité de surface $P = \dfrac{|F_e|}{S}$ est donc dirigée vers l'intérieur du condensateur (vers l'autre armature, soit dans

le sens de la normale sortante au conducteur vers le vide). Elle a pour expression :

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

Goutte chargée sphérique ; critère de stabilité de Rayleigh

4. Par symétrie sphérique, le champ électrique à l'extérieur ($r > R$) d'une goutte sphérique de rayon R et de charge Q est identique à celui d'une charge ponctuelle Q placée en son centre O :



$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r} \quad (r > R)$$

Juste à l'extérieur de la surface ($r = R^+$), le champ vaut $E(R^+) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. La force électrostatique par unité de surface, dirigée **vers l'extérieur** (tendant à dilater et fragmenter la goutte), vaut :

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(R^+)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}}$$

5. La goutte se fragmente dès que la pression électrostatique l'emporte sur la tension superficielle par unité de surface $\dfrac{\gamma}{R}$:

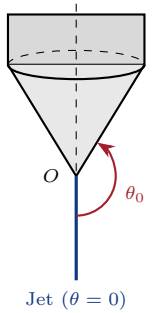
$$P > \frac{\gamma}{R} \iff \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} > \frac{\gamma}{R} \iff Q^2 > 32\pi^2\varepsilon_0\gamma R^3$$

On en déduit que la goutte devient instable si sa charge dépasse la valeur limite :

$$\boxed{Q > Q_{\text{lim}} = 4\pi\sqrt{2\varepsilon_0\gamma R^3}}$$

Cône de Taylor

6.



— Dans la région extérieure au cône, supposée vide de charges ($\rho = 0$), le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta V(\vec{r}) = 0}$$

— Le liquide constituant le cône étant conducteur et à l'équilibre électrostatique, $\vec{E} = \vec{0}$ en son sein : le cône est un volume équipotentiel, donc sa surface ($\theta = \theta_0$) est une surface équipotentielle :

$$\boxed{V(r, \theta_0, \varphi) = V_0 = \text{cste}}$$

7. L'équilibre mécanique en tout point de la surface du cône impose que la pression électrostatique $P = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ compense exactement la pression capillaire proportionnelle à $\dfrac{\gamma}{r}$:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \propto \frac{\gamma}{r} \implies E^2 \propto r^{-1} \implies \boxed{E(r) \propto r^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

8. Pour un potentiel de la forme $V(r, \theta, \varphi) = V_0 + r^\delta f(\theta)$, le champ électrostatique vaut :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta = -r^{\delta-1}\left[\delta f(\theta)\,\vec{e}_r + f'(\theta)\,\vec{e}_\theta\right]$$

Le module du champ électrique varie donc comme $\|\vec{E}\| \propto r^{\delta-1}$. Par identification avec le comportement en $r^{-1/2}$ requis à la question 7 :

$$\delta - 1 = -\frac{1}{2} \implies \boxed{\delta = \frac{1}{2}}$$

9. Le problème présentant une symétrie de révolution autour de l'axe du cône ($\partial V/\partial\varphi = 0$).
On cherche une solution sous forme d'un produit d'une fonction de r et d'une de θ, l'expression du laplacien, opérateur du seconde ordre, en sphérique conduit à séparer les deux variables pour obtenir deux équations du second ordre, dont l'une sera vérifiée par $f(\theta)$.

10. La surface du cône ($\theta = \theta_0$) devant être une surface équipotentielle $V(r, \theta_0) = V_0$ quel que soit $r > 0$, on doit avoir :

$$V_0 + r^{1/2} f(\theta_0) = V_0 \quad \forall r > 0 \implies \boxed{f(\theta_0) = 0}$$

11. D'après la relation $P = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ et la condition d'équilibre $P \propto \dfrac{\gamma}{r}$:

$$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \propto \frac{\gamma}{r} \implies \boxed{\sigma(r) \propto r^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

Ainsi, la densité surfacique de charge $\sigma(r)$ diverge au voisinage de la pointe du cône ($r \to 0$). Le fin jet liquide émis depuis le sommet du cône emporte donc une densité de charge très élevée ; en se fragmentant en microgouttelettes de très faible rayon R, celles-ci atteignent rapidement la limite de Rayleigh ($Q > Q_{\text{lim}} \propto R^{3/2}$) lors de l'évaporation du solvant, libérant des ions fortement chargés (multichargés).