Cinématique des fluides

La **cinématique des fluides** cherche à décrire le mouvement des fluides indépendamment des causes qui le produisent (forces de pression, viscosité, pesanteur), en définissant notamment le champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$ et le champ des masses volumiques $\mu(M,t)$.

I Modèle continu des fluides

1. L'état fluide et la particule de fluide

On appelle **fluide** tout corps matériel dont l'état physique est soit liquide, soit gazeux (voire supercritique). Contrairement à un solide qui oppose une résistance élastique (ou plastique) à une contrainte de cisaillement et possède une forme propre, un fluide est un milieu désordonné qui n'a pas de forme propre et se déforme continûment sous l'effet d'une contrainte tangentielle, aussi faible soit-elle : **un fluide peut s'écouler**.

Pour décrire un fluide en mouvement sans suivre individuellement les $\sim 10^{23}$ molécules qui le composent, on introduit trois échelles caractéristiques de longueur :

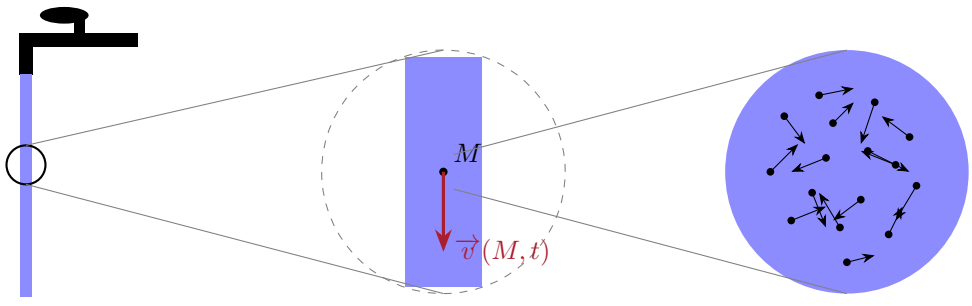
- **Échelle microscopique (d ou λ) :** échelle associée à la distance intermoléculaire moyenne d dans un liquide ($d \simeq {n^*}^{-1/3}$ où $n^* = \frac{\mu \mathcal{N}_A}{M}$ est la densité particulaire) ou au libre parcours moyen λ dans un gaz. Pour un gaz, avec le modèle des sphère dures de rayon a on a $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi n^* a^2}$
  - *Exemple de l'eau liquide :* $\mu \simeq 1,0 \times 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, $M = 18$ g $\cdot$ mol^{-1} $\implies$ $n^* \simeq 3,3 \times 10^{28}$ m^{-3}, d'où $d_{H_2O} \simeq 3 \times 10^{-10}$ m $= 0,3$ nm.
  - *Exemple de l'air* ($P = 1,0$ bar, $T = 20°$C) : $n^* = \dfrac{P}{k_B T} \simeq 2,5 \times 10^{25}$ m^{-3}, d'où une distance intermoléculaire $d_{\text{air}} \simeq 3,5$ nm et un libre parcours moyen $\lambda_{\text{air}} \simeq 60$ nm (pour un rayon moléculaire $a \simeq 10^{-10}$ m).

- **Échelle macroscopique (L) :** échelle caractéristique du dispositif expérimental ou de l'écoulement étudié (diamètre d'une conduite, taille d'une aile d'avion, longueur d'un canal, typiquement $L \sim 10^{-2}$ m à 10^2 m).

- **Échelle mésoscopique (ℓ) :** échelle intermédiaire vérifiant la double inégalité fondamentale :

$$\boxed{d, \lambda \ll \ell \ll L}$$

  Un élément de volume $\mathrm{d}\tau \sim \ell^3$ centré en un point M contient un très grand nombre de molécules ($\delta N = n^* \, \mathrm{d}\tau \gg 1$, ce qui permet de définir des grandeurs moyennes statistiques non fluctuantes) tout en restant ponctuel à l'échelle macroscopique L. Un tel élément de volume mésoscopique est appelé **particule de fluide** $\mathscr{F}$.



Échelle macroscopique L **Échelle mésoscopique ℓ** **Échelle microscopique d, λ**

2. Approximation des milieux continus

Lorsque l'échelle mésoscopique ℓ est concevable (soit $\lambda/L \ll 1$, condition vérifiée hors gaz très raréfiés), le fluide est étudié comme un **milieu continu** au sein duquel les grandeurs locales varient continûment dans l'espace et dans le temps.

On définit en tout point M et à tout instant t :

- la **masse volumique** locale : $\mu(M,t) = \dfrac{\delta m}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\mathrm{d}\tau}\sum_{i=1}^{\delta N} m_i$ (en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) ;
- la **vitesse mésoscopique** (ou vitesse eulérienne) : $\overrightarrow{v}(M,t) = \dfrac{1}{\delta m}\sum_{i=1}^{\delta N} m_i\,\overrightarrow{v}_i$ (en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$), définie comme la vitesse du centre d'inertie de la particule de fluide située en M à l'instant t ;
- les champs scalaires thermodynamiques locaux : pression $P(M,t)$, température $T(M,t)$, etc.

II Description d'un fluide en écoulement

1. Deux approches possibles : Lagrange et Euler

Deux points de vue complémentaires permettent de décrire cinématiquement un écoulement (à l'image de l'observation d'une rivière : on peut suivre une feuille portée par le courant ou observer l'eau passer sous un pont).

a. La description lagrangienne

Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813), mathématicien, mécanicien et astronome sarde naturalisé français.

Dans le **formalisme lagrangien**, généralisation directe de la mécanique du point, on découpe le fluide en particules fluides mobiles $\mathscr{F}$ que l'on identifie (par leur position initiale $\overrightarrow{r}_0$ à $t = 0$) et que l'on **suit individuellement au cours du temps**. On définit pour chaque particule :

- son vecteur position : $\overrightarrow{R}_{\mathscr{F}}(t) = \overrightarrow{OM}_{\mathscr{F}}(t)$;
- son vecteur vitesse : $\overrightarrow{V}_{\mathscr{F}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{R}_{\mathscr{F}}(t)}{\mathrm{d}t}$;
- son vecteur accélération : $\overrightarrow{A}_{\mathscr{F}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}_{\mathscr{F}}(t)}{\mathrm{d}t}$.

Définition — Trajectoire : On appelle **trajectoire** d'une particule de fluide $\mathscr{F}$ la courbe géométrique décrite par le centre d'inertie de cette particule au cours du temps dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.

b. La description eulérienne

Leonhard Euler (1707–1783), mathématicien et physicien suisse.

En mécanique des fluides, la **description eulérienne** consiste à se placer en chaque point géométrique $M(x,y,z)$ fixe dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ (système ouvert de volume mésoscopique fixe $\mathrm{d}\tau$) et à suivre l'évolution au cours du temps t des champs macroscopiques locaux : $\mu(M,t)$, $P(M,t)$, $T(M,t)$, $\overrightarrow{v}(M,t)$, $\overrightarrow{a}(M,t)\ldots$

Les coordonnées spatiales (x,y,z) et le temps t sont ici des **variables indépendantes** appelées *variables d'Euler*.

Lien entre les deux descriptions : Si la particule de fluide $\mathscr{F}$ passe au point géométrique $M = \overrightarrow{R}_{\mathscr{F}}(t)$ à l'instant t, sa vitesse lagrangienne coïncide avec le champ eulérien des vitesses évalué en ce point et à cet instant :

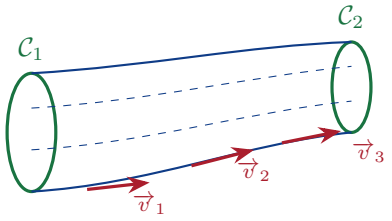
$$\boxed{\overrightarrow{V}_{\mathscr{F}}(t) = \overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{R}_{\mathscr{F}}(t), t\right)}$$

2. Lignes de courant et tubes de courant

Définition — Ligne de courant : À un instant t fixé, on appelle **ligne de courant** une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ des vitesses $\overrightarrow{v}(M,t)$.

Un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u}_x + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u}_y + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u}_z$ le long d'une ligne de courant est donc colinéaire à $\overrightarrow{v}(M,t)$, soit $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{0}$, ce qui s'écrit en coordonnées cartésiennes (à t fixé) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z(x,y,z,t)}$$



Tube de courant appuyé sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Définition — Tube de courant : À un instant t fixé, on appelle **tube de courant** la surface tubulaire formée par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un même contour fermé $\mathcal{C}_1$.

Remarque fondamentale : Une ligne de courant est une photographie *instantanée* (à t fixé) de la direction du champ des vitesses, tandis que la trajectoire est l'histoire *temporelle* d'une particule donnée. En régime non stationnaire, **les lignes de courant et les trajectoires sont distinctes**.

Exemple d'application (lignes de courant vs trajectoire) : On considère le champ de vitesse bidimensionnel instationnaire :

$$\overrightarrow{v}(x,y,t) = Axt\,\overrightarrow{e}_x - Byt^2\,\overrightarrow{e}_y \qquad \text{avec } A = 0{,}2\ \mathrm{s}^{-2} \text{ et } B = 0{,}1\ \mathrm{s}^{-3}$$

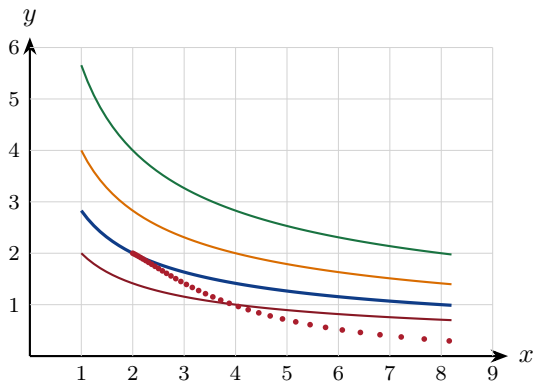
— **À l'instant $t_1 = 1$ s :** l'équation différentielle des lignes de courant s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}x}{Axt_1} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{Byt_1^2}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{Bt_1}{A}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Après intégration, $y\,x^{\frac{Bt_1}{A}} = \text{cste}$. Comme $\dfrac{Bt_1}{A} = \dfrac{0{,}1\times 1}{0{,}2} = \dfrac{1}{2}$, les lignes de courant à t_1 vérifient $y\sqrt{x} = \text{cste}$. Celle passant par le point $P_1(2,2)$ à $t_1 = 1$ s a pour équation :

$$y = 2\sqrt{\frac{2}{x}}$$

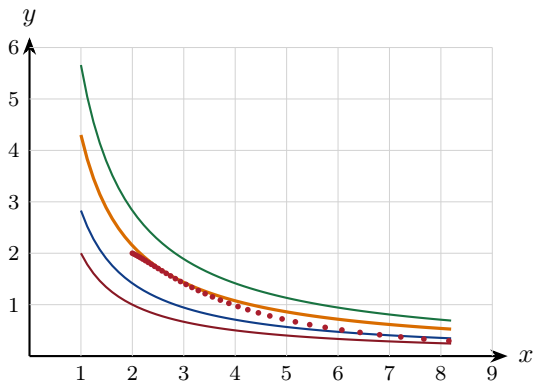
— **À l'instant $t_2 = 2$ s :** le rapport vaut $\dfrac{Bt_2}{A} = \dfrac{0{,}1\times 2}{0{,}2} = 1$, donc les lignes de courant deviennent des hyperboles équilatères d'équation :

$$y = \frac{\text{cste}}{x}$$

— **Trajectoire de P_1 :** en intégrant $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Axt$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -Byt^2$ depuis $(2,2)$ à $t_1 = 1$ s, on obtient $x(t) = 2\exp\left(\frac{A}{2}(t^2-1)\right)$ et $y(t) = 2\exp\left(-\frac{B}{3}(t^3-1)\right)$. La trajectoire (points rouges) coupe successivement les différentes lignes de courant !



Lignes de champ à $t_1 = 1$ s



Lignes de champ à $t_2 = 2$ s

3. Dérivée particulaire d'un champ eulérien

On cherche à exprimer la variation temporelle d'une grandeur intensive attachée à une particule de fluide $\mathscr{F}$ que l'on suit (description lagrangienne), à partir du champ eulérien associé.

a. Dérivée particulaire d'un champ scalaire (exemple : masse volumique)

Soit $g(M,t) = g(x,y,z,t)$ une grandeur intensive scalaire (par exemple la masse volumique $\mu(M,t)$).

À l'instant t, la particule $\mathscr{F}$ se trouve en $M(x,y,z)$ avec $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{r}(t)$ et possède la valeur $g_{\mathscr{F}}(t) = g(\overrightarrow{r},t)$.

À l'instant infiniment voisin $t+\delta t$, la particule $\mathscr{F}$ s'est déplacée de $\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{V}_{\mathscr{F}}(t)\,\delta t = \overrightarrow{v}(M,t)\,\delta t$ et occupe la position $M'(x+v_x\delta t,\ y+v_y\delta t,\ z+v_z\delta t)$. Sa grandeur vaut alors $g_{\mathscr{F}}(t+\delta t) = g(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{v}\delta t,\ t+\delta t)$.

En effectuant un développement limité au premier ordre en δt :

$$g(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{v}\delta t,\ t+\delta t) - g(\overrightarrow{r},t) = \frac{\partial g}{\partial t}\delta t + \frac{\partial g}{\partial x}v_x\delta t + \frac{\partial g}{\partial y}v_y\delta t + \frac{\partial g}{\partial z}v_z\delta t + o(\delta t) = \left[\frac{\partial g}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})g\right]\delta t + o(\delta t)$$

Définition — Dérivée particulaire : On appelle **dérivée particulaire** de la grandeur $g(M,t)$ la dérivée temporelle de g en suivant une particule de fluide dans son mouvement :

$$\frac{Dg}{Dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{g(\overrightarrow{r}+\overrightarrow{v}\delta t,\ t+\delta t) - g(\overrightarrow{r},t)}{\delta t}$$

On obtient l'expression fondamentale reliant dérivées lagrangienne et eulérienne :

$$\frac{Dg}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)g}_{\text{dérivée convective}}$$

- **Dérivée locale** $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ **:** variation due au caractère instationnaire du champ en un point fixe M.
- **Dérivée convective** $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})g$ **:** variation due au déplacement de la particule vers une région de l'espace où la grandeur g prend une valeur différente.

Pour la masse volumique $\mu(M,t)$, on écrit ainsi :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\mu$$

Expression de l'opérateur convectif $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})$ **:** En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{v}=v_x\,\overrightarrow{u}_x+v_y\,\overrightarrow{u}_y+v_z\,\overrightarrow{u}_z$ et $\overrightarrow{\text{grad}}=\dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u}_x+\dfrac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u}_y+\dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$, d'où l'opérateur différentiel scalaire :

$$\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

b. Accélération particulaire (champ vectoriel)

L'opérateur dérivée particulaire $\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})$ s'applique également à un champ vectoriel $\overrightarrow{g}(M,t)$ composante par composante. En particulier, l'accélération $\overrightarrow{A}_{\mathscr{F}}(t)$ d'une particule de fluide passant en M à l'instant t définit le **champ eulérien des accélérations** $\overrightarrow{a}(M,t)=\dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt}(M,t)$:

$$\overrightarrow{a}(M,t)=\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt}(M,t)=\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}(M,t)}_{\text{accélération locale}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{v}(M,t)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}(M,t)}_{\text{accélération convective}}$$

En coordonnées cartésiennes, l'accélération convective se projette selon :

$$\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}=\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_x+\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_y+\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\overrightarrow{u}_z$$

Remarque : L'accélération convective est un terme *non linéaire* en $\overrightarrow{v}$ (à l'origine de la complexité des équations de Navier-Stokes et de la turbulence). Elle peut s'écrire intrinsèquement (indépendamment du système de coordonnées) sous la forme :

$$\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}\right)\wedge\overrightarrow{v}$$

Applications (calculs d'accélérations convectives) :

1. **Écoulement de cisaillement plan :** $\overrightarrow{v}(M,t)=f(y,t)\,\overrightarrow{u}_x$.
   Les particules se déplacent à vitesse constante le long de chaque ligne de courant horizontale : $\overrightarrow{a}(M,t)=\dfrac{\partial f}{\partial t}\,\overrightarrow{u}_x$.
2. **Écoulement hyperbolique instationnaire :** $\overrightarrow{v}(x,y,t)=Axt\,\overrightarrow{e}_x-Bt^2y\,\overrightarrow{e}_y$.
3. **Écoulement linéaire :** $\overrightarrow{v}(x,y,t)=k\,[-x\,\overrightarrow{u}_x+(y+2x)\,\overrightarrow{u}_y]$ (stationnaire).
4. **Écoulement de point d'arrêt :** $\overrightarrow{v}(M,t)=-kx\,\overrightarrow{u}_x+ky\,\overrightarrow{u}_y$

III Conservation de la masse

1. Les débits massique et volumique

a. Débit massique

Définition — Débit massique : Soit $\mathcal{S}$ une surface géométrique orientée.
Le **débit massique** $D_m(\mathcal{S},t)$ à travers $\mathcal{S}$ est la masse algébrique δm de fluide qui traverse $\mathcal{S}$ dans le sens de son orientation par unité de temps :

$$D_m(\mathcal{S},t) = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{en } \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

b. Débit volumique

Définition — Débit volumique : Soit $\mathcal{S}$ une surface géométrique orientée. Le **débit volumique** $D_V(\mathcal{S},t)$ à travers $\mathcal{S}$ est le volume algébrique δV de fluide qui traverse $\mathcal{S}$ dans le sens de son orientation par unité de temps :

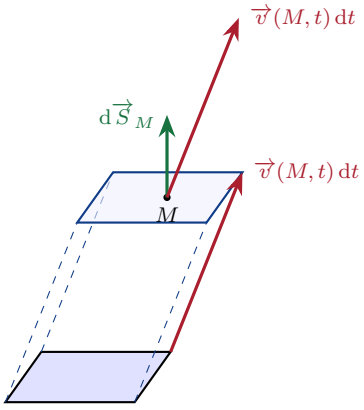
$$D_V(\mathcal{S},t) = \frac{\delta V}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{en } \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

2. Vecteur densité de courant de masse

Considérons un élément de surface orientée $\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M = \mathrm{d}S_M\,\overrightarrow{n}$ entourant un point M. Pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, les particules de fluide qui traversent $\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$ sont contenues dans le cylindre oblique de base $\mathrm{d}S_M$ et de génératrice $\overrightarrow{v}(M,t)\,\mathrm{d}t$.
Le volume algébrique de ce cylindre vaut :

$$\delta^2 V = (\overrightarrow{v}(M,t)\,\mathrm{d}t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$$

et la masse correspondante vaut $\delta^2 m = \mu(M,t)\,\delta^2 V = \mu(M,t)\overrightarrow{v}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M\,\mathrm{d}t$.



Définition — Vecteur densité de courant de masse : On appelle **vecteur densité de courant de masse** (exprimé en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{j}_m(M,t) = \mu(M,t)\,\overrightarrow{v}(M,t)$$

En intégrant sur toute la surface orientée $\mathcal{S}$, on exprime les débits massique et volumique sous forme de flux :

$$D_m(\mathcal{S},t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{j}_m(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M = \iint_{M\in\mathcal{S}} \mu(M,t)\overrightarrow{v}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$$

$$D_V(\mathcal{S},t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{v}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$$

Analogie avec les autres phénomènes de transport :

— Diffusion de particules : $\overrightarrow{j}_N = n^* \overrightarrow{v}$ et débit particulaire $\Phi_N = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j}_N \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$.

— Conduction électrique : $\overrightarrow{j}_{\text{él}} = \rho_q \overrightarrow{v}$ et intensité électrique $I = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j}_{\text{él}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$.

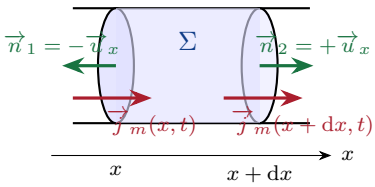
— Transferts thermiques : flux thermique $\Phi_{\text{th}} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$.

Application corrigée : Un gaz s'écoule en régime unidimensionnel uniforme dans un tuyau cylindrique de diamètre $d = 2,0$ cm. Une masse $M = 51$ g traverse une section droite en $\Delta t = 30$ min $= 1800$ s. Déterminer le débit massique. Sachant que $\mu_g = 2,5$ kg $\cdot$ m^{-3} déterminer la vitesse de l'écoulement.

3. Équation de conservation de la masse (équation de continuité)

a. Démonstration à une dimension (1D)

Considérons un écoulement unidimensionnel selon (Ox) dans un cylindre de section droite S constante, où $\overrightarrow{v}(M,t) = v(x,t)\,\overrightarrow{u}_x$, $\mu(M,t) = \mu(x,t)$ et $\overrightarrow{j}_m(M,t) = j_m(x,t)\,\overrightarrow{u}_x$. Effectuons un bilan de masse entre t et $t + \mathrm{d}t$ sur le système ouvert Σ délimité par les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ (volume $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}x$) :



— Variation de la masse contenue dans Σ :

$$\mathrm{d}m_\Sigma = [\mu(x,t+\mathrm{d}t) - \mu(x,t)]\,S\,\mathrm{d}x = \frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t)\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

— Masse algébrique reçue à travers les deux sections :

$$\delta m_{\text{reçue}} = j_m(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - j_m(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_m}{\partial x}(x,t)\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

La masse étant une grandeur conservative (ni création ni destruction de matière), $\mathrm{d}m_\Sigma = \delta m_{\text{reçue}}$, d'où l'équation locale de conservation de la masse à 1D :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_m}{\partial x}(x,t) = 0$$

b. Généralisation à trois dimensions (3D)

En intégrant sur un volume fixe $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée vers l'extérieur et en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski ($\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j}_m \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \overrightarrow{j}_m\,\mathrm{d}\tau$), on obtient l'**équation locale de conservation de la masse** (ou **équation de continuité**) :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{j}_m = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \overrightarrow{v}) = 0}$$

En développant $\operatorname{div}(\mu \overrightarrow{v}) = \mu \operatorname{div} \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\mu$, on fait apparaître la dérivée particulaire $\dfrac{D\mu}{Dt} = \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\mu$, ce qui donne la **formulation lagrangienne** de l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0}$$

c. Interprétation cinématique de $\operatorname{div} \overrightarrow{v}$

Suivons une particule de fluide de masse constante $\delta m = \mu(t)\, V(t)$, où $V(t)$ désigne son volume mésoscopique. Sa masse étant invariante au cours de son mouvement, $\dfrac{D(\delta m)}{Dt} = 0$, soit :

$$\frac{D(\mu V)}{Dt} = V\frac{D\mu}{Dt} + \mu\frac{DV}{Dt} = 0 \implies \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{D\mu}{Dt} = \operatorname{div} \overrightarrow{v}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{v} = \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt}}$$

La divergence du champ des vitesses mesure le **taux relatif de dilatation volumique** des particules de fluide :

- si $\operatorname{div} \overrightarrow{v} > 0$, la particule se dilate (détente) ;
- si $\operatorname{div} \overrightarrow{v} < 0$, la particule se contracte (compression) ;
- si $\operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0$, le volume de la particule se conserve au cours du mouvement.

4. Conditions aux limites cinématiques

Les fluides épousent la géométrie des parois qui les contiennent, ce qui impose des contraintes sur le champ des vitesses aux frontières du domaine fluide (en l'absence de changement d'état ou de paroi poreuse) :

- **Paroi solide fixe imperméable :** aucun fluide ne traverse la paroi, le débit volumique élémentaire est nul ($\overrightarrow{v}(P,t) \cdot \overrightarrow{n}(P)\, \mathrm{d}S = 0$). La composante normale de la vitesse du fluide est donc nulle en tout point P de la paroi :
$$\overrightarrow{v}(P,t) \cdot \overrightarrow{n}(P) = 0$$
- **Paroi solide mobile ou déformable :** par continuité de la composante normale de la vitesse, le fluide ne traverse pas la paroi :
$$\overrightarrow{v}_{\text{fluide}}(P,t) \cdot \overrightarrow{n}(P) = \overrightarrow{v}_{\text{paroi}}(P,t) \cdot \overrightarrow{n}(P)$$
- **Interface entre deux fluides non miscibles (1 et 2) :** le débit volumique traversant l'interface est continu, d'où la continuité de la composante normale du champ des vitesses :
$$\overrightarrow{v}_1(M,t) \cdot \overrightarrow{n}(M) = \overrightarrow{v}_2(M,t) \cdot \overrightarrow{n}(M)$$

Remarque : En mécanique des fluides **parfaits** (non visqueux), le fluide peut glisser tangentiellement le long d'une paroi solide ($\overrightarrow{v}_{\text{tangentielle}} \neq \overrightarrow{0}$), alors que pour un fluide **visqueux** (réel), la condition d'adhérence impose en outre l'égalité des composantes tangentielles ($\overrightarrow{v}_{\text{fluide}}(P,t) = \overrightarrow{v}_{\text{paroi}}(P,t)$).

IV Écoulements particuliers

1. Écoulement stationnaire (ou permanent)

Définition — Écoulement stationnaire : Un écoulement est dit **stationnaire** dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ si l'ensemble des champs eulériens du fluide sont indépendants du temps en tout point fixe de $\mathcal{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Cette propriété **dépend du référentiel d'étude**. Par exemple, le sillage d'un bateau naviguant à vitesse constante sur une rivière calme est *stationnaire dans le référentiel lié au bateau*, alors qu'il est *instationnaire dans le référentiel lié à la berge.*

Propriété — Écoulement stationnaire :
- L'accélération locale est nulle : l'accélération d'une particule de fluide se réduit à sa seule composante convective $\overrightarrow{a}(M) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$.
- Les lignes de courant sont fixes au cours du temps et **les trajectoires des particules de fluide sont confondues avec les lignes de courant**.
- L'équation de continuité devient $\text{div}\ \overrightarrow{j}_m = 0$: le vecteur densité de courant de masse $\overrightarrow{j}_m = \mu\overrightarrow{v}$ est **à flux conservatif**.
- Le débit massique sortant à travers toute surface fermée $\mathcal{S}$ est nul : $\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j}_m \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$.
- En appliquant ce résultat à un tronçon de tube de courant délimité par deux sections droites $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ (le flux étant nul sur la paroi latérale car $\overrightarrow{j}_m \perp \mathrm{d}\overrightarrow{S}_{\text{lat}}$), **le débit massique se conserve le long d'un tube de courant** :
$$D_m(\mathcal{S}_1) = D_m(\mathcal{S}_2)$$

2. Écoulement incompressible

a. Définition et distinction fluide / écoulement incompressible

Définition — Écoulement incompressible : Un écoulement est dit **incompressible** si chaque particule de fluide conserve un volume constant au cours de son déplacement ($\dfrac{DV}{Dt} = 0$), ce qui équivaut d'après l'équation de continuité à :
$$\text{div}\ \overrightarrow{v} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{D\mu}{Dt} = 0$$

Cette propriété est **indépendante du référentiel d'étude**. Il convient de distinguer :
- **Fluide incompressible (et homogène) :** milieu dont la masse volumique est constante ($\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 0 \implies \mu = \text{cste}$ en tout point et à tout instant). Un liquide est en première approximation un fluide incompressible ; tout écoulement d'un fluide incompressible homogène est nécessairement un écoulement incompressible ($\dfrac{D\mu}{Dt} = 0 \implies \text{div}\ \overrightarrow{v} = 0$).
- **Écoulement incompressible d'un fluide compressible :** un gaz est un fluide compressible, mais on admet que son écoulement peut être modélisé comme incompressible ($\text{div}\ \overrightarrow{v} = 0$) dès lors que la vitesse du fluide en tout point reste très inférieure à la célérité du son c dans ce gaz (nombre de Mach $\text{Ma} = \frac{v}{c} \ll 1$, typiquement $\text{Ma} < 0,3$).

b. Propriétés

Dans un écoulement incompressible :
- Le champ des vitesses $\overrightarrow{v}$ est **à flux conservatif** ($\text{div}\ \overrightarrow{v} = 0$).
- Le débit volumique à travers toute surface fermée est nul : $\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$.
- **Conservation du débit volumique le long d'un tube de courant :** $D_V(\mathcal{S}_1) = D_V(\mathcal{S}_2) = \text{cste}$. En approximation unidimensionnelle ($D_V = vS$), lorsque les lignes de courant se resserrent (rétrécissement de section S), **la vitesse du fluide augmente** (effet Venturi).

3. Écoulement tourbillonnaire

a. Rappels d'analyse vectorielle : opérateur rotationnel

Pour tout champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$, le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$ caractérise la circulation élémentaire du champ le long d'un contour fermé infinitésimal $d\Gamma_M$ entourant la surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}_M$:

$$\delta\mathcal{C}_M = \oint_{d\Gamma_M} \vec{a}(P,t) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}(M,t)\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_M$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Identités usuelles (pour tout champ scalaire f et tout champ vectoriel $\vec{a}$) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0} \qquad ; \qquad \text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}) = 0 \qquad ; \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,(f\vec{a}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \wedge \vec{a}$$

b. Vecteur tourbillon (ou vorticité)

Définition — Vecteur tourbillon : On appelle **vecteur tourbillon** d'un écoulement le champ pseudo-vectoriel :

$$\vec{\Omega}(M,t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M,t) \qquad (\text{en rad}\cdot\text{s}^{-1})$$

Le vecteur tourbillon est à flux conservatif ($\text{div}\,\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}) = 0$) et mesure le **taux de rotation locale** des particules de fluide sur elles-mêmes. Un écoulement est dit **tourbillonnaire** (ou rotationnel) lorsque $\vec{\Omega}(M,t) \neq \vec{0}$.

Exemples fondamentaux (attention aux idées reçues !) :

1. **Rotation en bloc autour d'un axe fixe** (Oz) **:** $\vec{v}(M) = \omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} = -\omega y\,\vec{u}_x + \omega x\,\vec{u}_y = \omega r\,\vec{u}_\theta$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right)\vec{u}_z = 2\omega\,\vec{u}_z \implies \vec{\Omega}(M) = \omega\,\vec{u}_z \neq \vec{0}$$

   Le vecteur tourbillon est égal au vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ de rotation solide : l'écoulement est **tourbillonnaire** et ses lignes de courant sont des cercles.

2. **Écoulement de cisaillement rectiligne :** $\vec{v}(M) = \alpha y\,\vec{u}_x$ (par exemple un écoulement visqueux entre deux plaques). Les lignes de courant sont des droites parallèles, pourtant :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\partial(\alpha y)}{\partial y}\vec{u}_z = -\alpha\,\vec{u}_z \implies \vec{\Omega}(M) = -\frac{\alpha}{2}\vec{u}_z \neq \vec{0}$$

   Une particule de fluide se déforme et tourne sur elle-même : **un écoulement à lignes de courant rectilignes peut être tourbillonnaire !**

4. Écoulement irrotationnel (ou potentiel)

a. Définition et potentiel des vitesses

Définition — Écoulement irrotationnel : Un écoulement est dit **irrotationnel** dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ si le vecteur tourbillon est nul en tout point du domaine fluide :

$$\overrightarrow{\Omega}(M,t) = \overrightarrow{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{0}$$

Cette propriété dépend du référentiel d'étude (par changement de référentiel en rotation uniforme $\overrightarrow{\omega}_e$, $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega}_e$).

Dans un domaine simplement connexe, la condition $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ assure l'existence d'un champ scalaire $\Phi(M,t)$, appelé **potentiel des vitesses** (en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$), tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi(M,t)}$$

Un tel écoulement est qualifié d'**écoulement potentiel**. Les lignes de courant sont en tout point orthogonales aux surfaces équipotentielles $\Phi(M,t) = \text{cste}$ et orientées dans le sens des potentiels Φ croissants.

Exemple d'écoulement irrotationnel à lignes de courant circulaires (tourbillon libre) : Considérons le champ plan stationnaire défini hors de l'axe (Oz) $(r > 0)$ par :

$$\overrightarrow{v}(x,y) = K\frac{-y\,\overrightarrow{u}_x + x\,\overrightarrow{u}_y}{x^2+y^2} = \frac{K}{r}\,\overrightarrow{u}_\theta$$

Les lignes de courant vérifient $\dfrac{\mathrm{d}x}{-y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{x} \implies x^2 + y^2 = \text{cste}$ (des cercles). Pourtant :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u}_z = \left[\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] K\,\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, **un écoulement à lignes de courant circulaires peut être irrotationnel** (en dehors de la singularité $r = 0$, où est concentrée toute la vorticité).

b. Écoulement irrotationnel et incompressible : équation de Laplace

Lorsque l'écoulement est simultanément :
- **irrotationnel** : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$;
- **incompressible** : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0$;

alors $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi) = 0$, soit l'**équation de Laplace** vérifiée par le potentiel des vitesses :

$$\boxed{\Delta\Phi(M,t) = 0}$$

Cette équation linéaire permet de résoudre analytiquement ou numériquement de nombreux problèmes d'aérodynamique et d'hydrodynamique (écoulement autour d'un cylindre, d'une sphère, etc.).

V Annexe : Tracé numérique des lignes de courant et d'une trajectoire (Python)

Le script suivant permet de tracer les lignes de courant à $t_1 = 1$ s du champ instationnaire $\overrightarrow{v}(x,y,t) = Axt\,\overrightarrow{e}_x - Byt^2\,\overrightarrow{e}_y$ ainsi que la trajectoire lagrangienne (par méthode d'Euler explicite) de la particule située en $(2,2)$ à $t_1 = 1$ s :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def v(x, y, t):
    A = 0.2
    B = 0.1
    vx = A * x * t
    vy = -B * y * t**2
    return vx, vy

x0, y0 = 2.0, 2.0
xcur, ycur = x0, y0
nt = 3000
dt = 1.0e-3
xpos = np.zeros(nt, dtype=float)
ypos = np.zeros_like(xpos)

# Int\'egration lagrangienne de la trajectoire entre t1 = 1 s et t3 = 4 s
for it in range(nt):
    xpos[it] = xcur
    ypos[it] = ycur
    t = 1.0 + float(it) * dt
    vx, vy = v(xcur, ycur, t)
    xcur = xcur + vx * dt
    ycur = ycur + vy * dt

# Lignes de courant pour t1 = 1 s : y = 2 * sqrt(C / x)
xarr = np.arange(0.5, 8.0, 0.05)
fig, ax = plt.subplots()
for C in [1.0, 2.0, 4.0, 8.0]:
    ax.plot(xarr, 2.0 * np.sqrt(C / xarr), label=f"C␣=␣{C}")

ax.scatter(xpos[::20], ypos[::20], marker='d', s=6, c='r', label="Trajectoire␣P1")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.legend()
plt.grid()
plt.show()
```