PC* Devoir Maison N°7 niveau X-ENS

On confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec leur matrice colonne associée dans la base canonique.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on pourra écrire x sous la forme $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}$ et on note $S_n = \{x \in \mathbb{R}^n , \|x\| = 1\}$

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\|A\| = \underset{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}{Sup} \frac{\|A\,x\|}{\|x\|} = \underset{x \in S_n}{Sup} \|A\,x\|$. On admet que $\|A\|$ existe bien, qu'elle vérifie cette égalité et que $A \mapsto \|A\|$ est bien une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

Dans tout le problème, A désigne une matrice <u>symétrique</u> de $M_n(\mathbb{R})$

On note $\rho(A) = \underset{\lambda \in Sp(A)}{Max} |\lambda|$ (avec $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A)

1) Montrer que $\|A\| = \underset{x \in S_n}{Sup} \left| x^T A\,x \right| = \rho(A)$

2) On suppose que les coefficients de A sont tous bornés par 1 ((c'est-à-dire $\forall i, j \quad \left| a_{i,j} \right| \le 1$)

a) Montrer que $\|A\| \le n$. Indication : pour $x \in S_n$, appliquer Cauchy-schwarz à chaque coordonnée de $A\,x$

b) Supposons qu'il existe $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent 1 ou -1 telle que $A = C\,C^T$ ou $A = -C\,C^T$, montrer alors que $\|A\| = n$

c) Réciproquement, supposons que $\|A\| = n$, montrer qu'il existe $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent 1 ou -1 telle que $A = C\,C^T$ ou $A = -C\,C^T$ .Indication : on admettra qu'il existe $x \in S_n$ tel que $\|A\,x\| = \|A\|$

<u>Dans toute la suite du problème</u>, on suppose que $A = (a_{i,j})_{1 \le i, j \le n}$ est une matrice symétrique réelle dont les coefficients supérieurs $(a_{i,j})_{1 \le i \le j \le n}$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tilde{\lambda}, P)$ et de même loi donnée par :

$$a_{i,j}(\Omega) = \{-1, 1\} \quad P(a_{i,j} = 1) = P(a_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$$

Le but est de démontrer que $\|A\| \underset{n \to +\infty}{=} O(\sqrt{n})$ avec une grande probabilité

3) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé

a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \quad ch(t) \le e^{t^2/2}$

b) Soit $u \in \mathbb{R}^+$, exprimer l'espérance $E\left(e^{u\,x^T A\,x}\right)$ sous la forme d'un produit de cosinus hyperboliques faisant intervenir u et les composantes du vecteur x

c) En déduire que $\forall u \in \mathbb{R}^+ \quad E\left(e^{u\,x^T A\,x}\right) \le e^{u^2 \|x\|^4}$

d) Soient $u \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $P\left(x^T A x \geq \alpha \sqrt{n}\right) \leq e^{-u\alpha\sqrt{n} + u^2 \|x\|^4}$

e) En déduire que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad P\left(x^T A x \geq \alpha \sqrt{n}\right) \leq \exp\left(-\dfrac{\alpha^2 n}{4\|x\|^4}\right)$

puis que $P\left(\left|x^T A x\right| \geq \alpha \sqrt{n}\right) \leq 2\exp\left(-\dfrac{\alpha^2 n}{4\|x\|^4}\right)$

f) On admet qu'il existe $x \in S_n$ tel que $\left|x^T A x\right| = \|A\|$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\|A\| \geq \alpha \sqrt{n}\right) = 0$