

PC* Devoir Surveillé N°1 durée 4h**Problème 1 : Intégrales et suites**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n définies sur \mathbb{R}^+ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}$

- 1) Tracer le tableau de variations de f_n sur \mathbb{R}^+ et déterminer le maximum de f_n sur \mathbb{R}^+
- 2) Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$
- 3) Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ converge et vérifier que $\mathbb{R}^+ \subset D$
- 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ existe et que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

Dans la suite du texte, on pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$

- 5) Exprimer $H_n(x)$ en fonction de $\int_0^x f_n(t) dt$, montrer que H_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et calculer $H'_n(x)$
- 6) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\lim_{x \rightarrow 0} H_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_n(x)$
- 7) Pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(x)$

Dans la suite du texte on pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$

- 8) Ecrire la formule de Taylor reste intégral pour une fonction f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$
- 9) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{-t} t^n}{n!} dt$
- 10) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = H_n(n)$
- 11) Montrer que $u_n - u_{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$
- 12) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (on pourra utiliser 1)) et convergente vers une limite $l \in [0, 1[$

Problème 2 : Autour de l'intégrale de Dirichlet

Les parties sont indépendantes

***On rappelle la caractérisation séquentielle de la limite** : Soit I un intervalle et a une borne de I . f une fonction définie sur I et $L \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (éventuellement L peut être égale à $+\infty$ ou $-\infty$). On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \text{Pour toute suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } I \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$$

* **On pourra utiliser sans démonstration la propriété** : $\forall t \geq 0 \quad |\sin t| \leq t$

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt. \text{ On pose aussi } I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \text{ et } J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$

I Convergence et convergence absolue

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $I(\alpha)$ converge

2) En effectuant une intégration par parties, exprimer $J(\alpha)$ en fonction de α et de $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$.

En déduire que $J(\alpha)$ converge si $\alpha > 0$ et en déduire le domaine de définition de f (c'est-à-dire l'ensemble des α tels que $f(\alpha)$ converge)

3) Montrer que si $\alpha > 1$ alors $J(\alpha)$ converge absolument

4) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| dt$

5) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. En encadrant $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$, montrer que

$\forall n \geq 2 \quad \frac{2}{\pi^\alpha} (S_n - 1) \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \frac{2}{\pi^\alpha} S_{n-1}$. En déduire que $J(\alpha)$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$

6) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $f(\alpha)$ converge absolument

II Limite de f en 0 et en 2

Dans tout le paragraphe, on suppose que $\alpha \in]0, 2[$ (On rappelle alors que $f(\alpha)$ est convergente)

1) On pose $K(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ et $L(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$

a) Considérons une suite quelconque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de l'intervalle $]0, 2[$ qui converge vers 0. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K(u_n) = 1 - \cos 1$. En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 0} K(\alpha)$

b) Etablir une relation entre $L(\alpha)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt$

c) En majorant $\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt \right|$, déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} L(\alpha)$

d) En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha)$

2) On pose $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt$

a) Montrer que $F(\alpha)$ converge (pour $\alpha \in]0, 2[$)

b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha F(\alpha)$.

c) On pose $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$. Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et qu'elle admet un minimum sur $[0, \pi]$. On pose $\mu = \underset{t \in [0, \pi]}{\text{Min}} \varphi(t)$ (on ne demande pas de l'expliciter). Justifier que $\mu > 0$

d) Montrer que $f(\alpha) \geq \alpha \int_0^\pi \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha+1}} dt \geq \alpha \mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

e) En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 2} f(\alpha)$.

III Calcul de $f(1)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$,

1) Montrer que l'intégrale I_n converge, que $\forall n \geq 1 \quad I_n = I_{n-1}$ et en déduire la valeur de I_n ,

2) On pose $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \psi(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$,. Montrer que ψ est prolongeable par continuité en 0 et

montrer que la fonction ψ ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t) dt$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

4) Montrer que $J_n = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$, En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$,

IV Etude d'une série

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

On pose $v_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = (-1)^n v_n$

1) Montrer que la suite (v_n) est décroissante et converge vers 0 ; En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

2) Montrer que $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$. En déduire la valeur de S et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_n^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Problème 3 : Séries

On rappelle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$

On considère la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$

On pose $\beta_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n \in \mathbb{Z}$

3) Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \beta_n$

4) Préciser le signe de ρ_n en fonction de n

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! |\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Montrer que l'inégalité est stricte (on fera intervenir $\rho_n - \rho_{n+1}$)

6) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, β_n est l'entier le plus proche de $e^{-1} n!$

On pose $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$, $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ et $v_n = (-1)^{n+1} J_n$

7) Montrer que la série $\sum v_n$ converge

8) Montrer que $\delta_n = e^{-1} v_n$. En déduire que $\sum \delta_n$ converge

Indication : appliquer Taylor reste intégral à la fonction exponentielle pour $a=0$ et $b=-1$

9) Déterminer une relation entre J_{n+1} et J_n . En déduire un équivalent de J_n quand $n \rightarrow +\infty$ et en déduire la nature de $\sum |\delta_n|$ et $\sum \frac{|\delta_n|}{n}$

On pose $A = -\int_0^1 e^x \ln(1-x) dx$. On admettra que $\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$

On pose pour $x \in [0, 1[$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n e^x \frac{x^k}{k}$ et $A_n = \int_0^1 S_n(x) dx$

10) Montrer que l'intégrale A converge

11) En appliquant le théorème de convergence dominée à $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e}$