Lycée Clemenceau Nantes, PC, année 2025-2026* *le 18/10/25*

PC* Devoir Surveillé N°2 durée 4h

Problème 1 : Niveau Centrale/Mines

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.
Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels et t un endomorphisme non nul de X.
Soit $\mathcal{B}$ une base de X, on note $T_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant t dans cette base.
On note $\mathrm{Ker}(t)$ le noyau de t, $\mathrm{Im}(t)$ l'image de t et $\mathrm{rg}(t) = \dim \mathrm{Im}(t)$ le rang de t.
On dit que t est une *homothétie* si c'est un multiple scalaire de l'identité.
On note Id l'endomorphisme identité de X, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et 0 la matrice nulle quelles que soient ses dimensions.
On appelle *projecteur* un endomorphisme p de X *idempotent*, c'est-à-dire tel que $p^2 = p$. On note alors $p' = \mathrm{Id} - p$ le projecteur associé.

I - Traces et projecteurs

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle *trace* de A le nombre réel suivant :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1) Soient A et B éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2) Montrer que la trace de la matrice $T_{\mathcal{B}}$ associée à t est indépendante de la base $\mathcal{B}$.
On appelle *trace de t*, notée $\mathrm{tr}(t)$, la valeur commune des traces des matrices représentant t. On dit que la trace est un invariant de similitude.

3) Soit p un projecteur de X. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

4) Montrer que, si l'endomorphisme s est une somme finie de projecteurs p_i, $i \in [\![1, m]\!]$, alors :

$$\mathrm{tr}(s) \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(s) \geqslant \mathrm{rg}(s)$$

La fin du problème a pour but d'établir la réciproque de cette propriété.

II - Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que p est un projecteur de rang 1.
Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de X adaptée à la décomposition $X = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, c'est-à-dire que f_1 est un vecteur directeur de $\mathrm{Im}(p)$ et $(f_2, \ldots, f_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

5) Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ t \circ p = \mu \cdot p$ (t étant toujours fixé dans $\mathcal{L}(X)$).

6) Montrer que, dans la base $\mathcal{C}$, la matrice représentant t s'écrit :

$$T_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & B & \\ \times & & & \end{array}\right) \quad \text{(les } \times \text{ représentant des réels quelconques)} \tag{1.1}$$

où μ est le nombre réel dont l'existence découle de la question 5 et $B \in \mathcal{M}_{n-1}$.

7) Montrer que si $p' \circ t \circ p'$ n'est pas proportionnel à p', alors B, définie en (1.1), n'est pas la matrice d'une homothétie.
On rappelle que $p' = \mathrm{Id} - p$.

III - Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme t n'est pas une homothétie.

8) Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $t(x)$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).

9) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice $T_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$T_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \times & \cdots & \times \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ & & A & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_{n-1}.$$

10) En déduire que si $\mathrm{tr}(t) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $T_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

Soit $(d_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{tr}(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i$. (on pourra raisonner par récurrence sur n)

11) En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $T_{\mathcal{B}}$ a pour éléments diagonaux d_1 et d_2.

Soit $d \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$, il existe un projecteur ℓ de X, de rang 1, tel que d'une part $\ell \circ t \circ \ell = d \cdot \ell$ et d'autre part $\ell' \circ t \circ \ell'$ ne soit pas proportionnel à $\ell' = \mathrm{Id} - \ell$.

12) En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions **6** et **7**, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant t s'écrit :

$$T_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \times & & & \\ \vdots & & B & \\ \times & & & \end{array}\right) \quad \text{où } B \text{ n'est pas une matrice d'homothétie.}$$

13) En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice $T_{\mathcal{B}}$ a pour éléments diagonaux les d_i, $i \in [\![1, n]\!]$.

Problème 2 : Niveau CCINP

Les questions 1) 2) 3) sont indépendantes

Soit $N \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{N} \quad N^k = 0$. On pose $A = I_3 + N$

Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $N = Mat_B(u)$ avec B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Supposons $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$ (N est nilpotente d'indice 3)

a) Soit $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrer que $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que N est semblable à $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Soit $M = N^2 - N$. Montrer que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. En déduire que M est semblable à N

c) En remarquant que $(A - I_3)^3 = 0$, montrer que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de I_3, A, A^2 puis en fonction de I_3, N, N^2. En déduire que A^{-1} est semblable à A

2) Supposons $N^2 = 0$ et $N \neq 0$ (N est nilpotente d'indice 2)

a) Montrer que $\mathrm{Im}\, u \subset Ker u$. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}\, u$ et de $Ker u$

b) Soit $e_3' \notin Ker u$. On pose $e_1' = u(e_3')$ et on considère $e_2' \in Ker u$ non colinéaire à e_1'

Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que N est semblable à $N'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que $-N$ est semblable à N.

d) Montrer que A est inversible et que A^{-1} est semblable à A

3) Exemple : Soit $A = Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $f \in L(\mathbb{R}^3)$ et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$

a) Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Préciser la matrice de passage et la formule de changement de bases. Indication : on pourra chercher une base de $Ker(f - Id)$.

b) Montrer que A' est inversible et déterminer A'^{-1}

c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $-N$ est semblable à N (préciser la matrice de changement de bases)

d) En déduire que A'^{-1} est semblable à A' puis que A^{-1} est semblable à A

Problème 3 : niveau CCINP

On admettra que si A *et* B sont dans $M_n(\mathbb{C})$ alors l'application $x \in \mathbb{C} \mapsto \det(xA + B)$ est polynômiale.

1) Soient A, B, C, D des éléments de $M_n(\mathbb{C})$

On suppose que D est inversible et que $DC = CD$. Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

indication : exprimer $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right)$ de deux façons

2) Supposons encore que $DC = CD$ et $D \in M_n(\mathbb{C})$ quelconque (pas forcément inversible)

a) Montrer qu'il existe un nombre fini de valeurs de $x \in \mathbb{C}$ tels que la matrice $D - xI_n$ soit non inversible. On pose $x_1, \ldots, x_p$ ces valeurs. Donc $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ $D - xI_n$ est inversible

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D - xI_n \end{pmatrix} = \det(AD - BC - xA)$

c) Montrer que la relation de la question b) est valable $\forall x \in \mathbb{C}$.

d) En déduire $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

3) Application

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2A_n & A_n \\ A_n & 2A_n \end{pmatrix}$

a) Quelle est la taille de la matrice A_n ? Déterminer $\det A_{n+1}$ en fonction de $\det A_n$

b) Déterminer $\det A_n$ en fonction de n