PC* Devoir Surveillé N°3 durée 4h niveau CCINP

Problème 1

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines fonctions définies par des sommes de séries, notamment les fonctions Zéta de Riemann et Zéta alternée. Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

Q 1. Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

Q 2. Montrer que ζ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

Q 3. Étudier le sens de variation de ζ.

Q 4. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

Q 5. Soit $x \in \mathcal{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

Q 6. En déduire, que pour tout $x \in \mathcal{D}_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

Q 7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q 8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q 9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose (quand c'est possible) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx$ et $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

Et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_\alpha(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$

1) Montrer que $\Gamma(\alpha)$ converge $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

2) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

3) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

4) Montrer que $I(\alpha)$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

5) On suppose $\alpha > 1$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(x) = x^{\alpha-1} e^{-nx}$

a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \varphi_\alpha(x)$

b) Montrer que u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$

c) Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$ et $\varsigma(\alpha)$ (remplacer $\varphi_\alpha(x)$ par son développement en série)

d) En déduire un équivalent de $I(k)$ lorsque $k \in \mathbb{N}$ et $k \to +\infty$

III On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $[0,1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3. *Lien avec ζ*
Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)\ .$$

Puis en déduire la limite de F en $+\infty$

IV Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

On admet que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$

1- *Développement asymptotique en 1*

(a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

(b) En déduire deux réels a et b qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$ tels que l'on ait pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$ (utiliser III 3))

2- *Développement asymptotique en 1 (bis)*
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ où v_n est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

(a) Justifier que pour $n \geqslant 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Justifier que pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

(c) Exprimer pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

(d) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

(e) En déduire que l'on a pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

3 - *Application*

Déduire des résultats précédents une expression à l'aide de $\ln 2$ et γ de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}.$$

V . Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On note $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ par elle même

1 - *Étude de la convergence*

(a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme en fonction de F de la série produit $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$, lorsque $x > 1$.

(b) Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire pour $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

2 - *Cas où $x = 1$*

On suppose dans cette question que $x = 1$.

(a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{k(n-k)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

Problème 2 : (plus difficile que le problème 1)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 1-périodiques (c'est-à-dire vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x)$). On admet que si $f \in E$ alors f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$ et on considère $T : f \mapsto T(f)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $e_k : x \mapsto e^{2ik\pi x}$ (on a bien $e_k \in E$). En particulier e_0 est la fonction constante égale à 1.

Première partie :

1) Montrer que $T \in L(E)$

2) Montrer que $\forall f \in E \quad \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

3) Déterminer $T(e_k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que 0 et 1 sont valeurs propres de T

4) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$.

a) Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ On pose $f_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k}$. Montrer que $f_\lambda \in E$

b) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}$. Déterminer $T(S_n)$ en fonction de S_{n-1} pour $n \geq 1$

c) Montrer que $(T(S_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $T(f_\lambda)$ (on pourra utiliser la question 2))

d) En déduire que $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ et en déduire que λ est valeur propre de T

Deuxième partie

Soit $\alpha \in]0,1[$ .Pour $f \in E$, on pose $A_\alpha(f) = \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \right\}$. On pose F_α l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $A_\alpha(f)$ soit majoré. On admet que F_α est un sous espace vectoriel de E. Pour $f \in F_\alpha$, on pose $m_\alpha(f) = Sup(A_\alpha(f))$

1) Montrer que F_α est stable par T. Montrer que $m_\alpha(T(f)) \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^{\alpha+1}}$. On appelle T_α l'endomorphisme induit par T sur F_α

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |e^{ix} - 1| \leq |x|$ et en déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$. On veut montrer que $f_\lambda \in F_\alpha$ (avec f_λ défini dans la 1ière partie)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq y$

a) Supposons $|x - y| \geq 1$. Déterminer M_1 (indépendant de x et y) tel que $\frac{|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M_1$

b) Supposons $|x - y| < 1$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n-1} < |x - y| \leq 2^{-n}$. Ecrire $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|$ sous forme de série, séparer les termes pour $k > n$ et les termes pour $k \leq n$. Pour $k > n$, majorer en utilisant $|e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)| \leq 2$ et pour $k \leq n$., majorer en utilisant la question 2). En déduire qu'il existe M_2 tel que $\frac{|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M_2$

c) En déduire que $f_\lambda \in F_\alpha$. Que peut en en déduire pour le spectre de T_α ?