PC* Devoir Surveillé N°3 durée 4h Niveau Centrale/Mines

Problème 1:

Les parties II , III , IV sont dans une large mesure indépendantes

On admettra que $\forall x \in \left]-1,1\right[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

On admettra le résultat suivant (th de Fubini) : Soit une suite $\left(u_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ dépendant de deux indices, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons que $\forall i \in \mathbb{N} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} u_{i,j}$ converge absolument, on note $S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_{i,j}\right|$. Supposons de plus que $\sum_{i\in\mathbb{N}} S_i$ converge alors $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$ (et ces deux sommes existent)

Notations : On pose

$$\forall x \in \left]1,+\infty\right[\quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \ ; \qquad \forall x \in \left]-1,1\right] \quad F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) x^k$$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_k(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x^{k+1}}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x (on rappelle que $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$)

$$\forall k \ge 2 \quad S_k = \int_1^{+\infty} \varphi_k(x)\,dx \quad \text{et } T_k = \int_2^{+\infty} \varphi_k(x)\,dx$$

Première partie (questions indépendantes)

1) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ avec $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$, en déduire $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

2) Montrer que ζ est continue sur $\left]1,+\infty\right[$

3) a) Montrer que $\sum\left(\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ converge. On pose $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ (constante d'Euler)

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ lorsque $n \to +\infty$

Deuxième partie

1) Etudier la convergence des intégrales impropres S_k et T_k

2) Pour $k \ge 2$, Montrer que $S_k = \dfrac{\zeta(k)}{k}$. Indication : On écrira $\int_1^N \varphi_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \varphi_k(x)\,dx$

3) Montrer que $\sum_{k\ge 2} (-1)^k T_k$ est absolument convergente. On pose $T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k T_k$

4) Montrer que $\sum_{k\ge 2} (-1)^k S_k$ est convergente (on pourra déterminer une relation entre S_k et T_k)

On pose $S=\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k S_k$

5) Déterminer une relation entre S et T (utiliser l'expression de $\ln(1+x)$ et ln2 sous forme de série)

6) On pose $\forall x\in[2,+\infty[\quad \varphi(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x^2(1+x)}$

Montrer que $\int_2^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ converge. Montrer que $T=\int_2^{+\infty}\varphi(x)\,dx$

7) Calcul de S : On rappelle que $\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Déterminer une relation entre T et γ puis montrer que $S=\gamma$ (indication : écrire $\int_2^N\varphi(x)\,dx=\sum_{n=2}^{N-1}\int_n^{n+1}\varphi(x)\,dx$ et calculer $\int_n^{n+1}\varphi(x)\,dx$) .

Troisième partie

On rappelle qu'on a posé $F(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k$ et $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$

1) a) Montrer que $\forall x\in\,]1,+\infty[\quad \zeta(x)\geq 1$

b) Posons $f_n:x\mapsto\dfrac{1}{n^x}$ pour $x\in\,]1,+\infty[$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$.

En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.

c) Etudier les variations de ζ sur $]1,+\infty[$

2) On pose $g_n:x\mapsto\dfrac{(-1)^n}{n}\zeta(n)x^n$. On a donc $F(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}g_n(x)$

Montrer que l'ensemble de définition de F est bien $]-1,1]$

3) Montrer que F est continue sur $]-1,1[$

Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, en déduire que F est également continue en 1.

F est donc continue sur $]-1,1]$

4) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\geq 2$, on pose $u_{n,k}:x\mapsto\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{-x}{n}\right)^k$

a) n étant fixé, montrer que $\sum_{k\geq 2}u_{n,k}(x)$ converge absolument pour $x\in\,]-n,n[$. On pose alors $U_n(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}u_{n,k}(x)$ et $V_n(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}|u_{n,k}(x)|$ pour $x\in\,]-n,n[$.

b) Montrer que $U_n(x)=\dfrac{x}{n}-\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ et $V_n(x)=-\dfrac{|x|}{n}-\ln\left(1-\dfrac{|x|}{n}\right)$ pour $x\in\,]-n,n[$

c) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} V_n(x)$ converge pour $x \in]-1,1[$

d) En déduire que $\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = F(x)$ (on pourra appliquer le th de Fubini en justifiant)

e) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ converge normalement sur $[0,1]$. En déduire que $\forall x \in]-1,1] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = F(x)$. En déduire la valeur de $F(1)$

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,+\infty[$ on pose $G_n(x) = \dfrac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$.

Montrer que $\forall x \in]-1,1] \ \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(G_n(x)) = F(x) - \gamma x$.

En déduire que la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers une fonction G continue

Quatrième partie

On rappelle que $\forall x \in]-1,1] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = F(x)$ avec $U_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$

1) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,1]$ et exprimer $F'(x)$ sous forme de somme d'une série. Que vaut $F'(1)$?

2) Montrer que pour $x > -1 \quad \int_0^1 \dfrac{1-t^x}{1-t}\,dt$ est convergente.

3) Montrer que pour $x > -1 \quad \int_0^1 \dfrac{1-t^x}{1-t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(n+x)}$ (on pourra écrire pour $\dfrac{1}{1-t}$ sous forme de série pour $t \in [0,1[$). En déduire $\forall x \in]-1,1] \quad F'(x) = \int_0^1 \dfrac{1-t^x}{1-t}\,dt$.

Problème 2 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 1-périodiques (c'est-à-dire vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x)$). On admet que si $f \in E$ alors f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$ et on considère $T : f \mapsto T(f)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $e_k : x \mapsto e^{2ik\pi x}$ (on a bien $e_k \in E$). En particulier e_0 est la fonction constante égale à 1.

Première partie :

1) Montrer que $T \in L(E)$

2) Montrer que $\forall f \in E \quad \|T(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$

3) Déterminer $T(e_k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que 0 et 1 sont valeurs propres de T

4) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$.

a) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ On pose $f_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_{2^k}$. Montrer que $f_\lambda \in E$

b) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}$. Déterminer $T(S_n)$ en fonction de S_{n-1} pour $n \geq 1$

c) Montrer que $\left(T(S_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $T(f_\lambda)$ (on pourra utiliser la question 2))

d) En déduire que $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ et en déduire que λ est valeur propre de T

Deuxième partie

Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$ .Pour $f \in E$, on pose $A_\alpha(f) = \left\{ \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \right\}$. On pose F_α l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $A_\alpha(f)$ soit majoré. On admet que F_α est un sous espace vectoriel de E . Pour $f \in F_\alpha$, on pose $m_\alpha(f) = Sup(A_\alpha(f))$

1) Montrer que F_α est stable par T . Montrer que $m_\alpha(T(f)) \leq \dfrac{m_\alpha(f)}{2^{\alpha+1}}$. On appelle T_α l'endomorphisme induit par T sur F_α

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |e^{ix} - 1| \leq |x|$ et en déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$. On veut montrer que $f_\lambda \in F_\alpha$ (avec f_λ défini dans la 1ière partie)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq y$

a) Supposons $|x-y| \geq 1$. Déterminer M_1 (indépendant de x et y) tel que $\dfrac{|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M_1$

b) Supposons $|x-y| < 1$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n-1} < |x-y| \leq 2^{-n}$. Ecrire $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|$.sous forme de série, séparer les termes pour $k > n$ et les termes pour $k \leq n$. Pour $k > n$, majorer en utilisant $|e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)| \leq 2$ et pour $k \leq n$., majorer en utilisant la question 2) . En déduire qu'il existe M_2 tel que $\dfrac{|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq M_2$

c) En déduire que $f_\lambda \in F_\alpha$. Que peut en en déduire pour le spectre de T_α ?