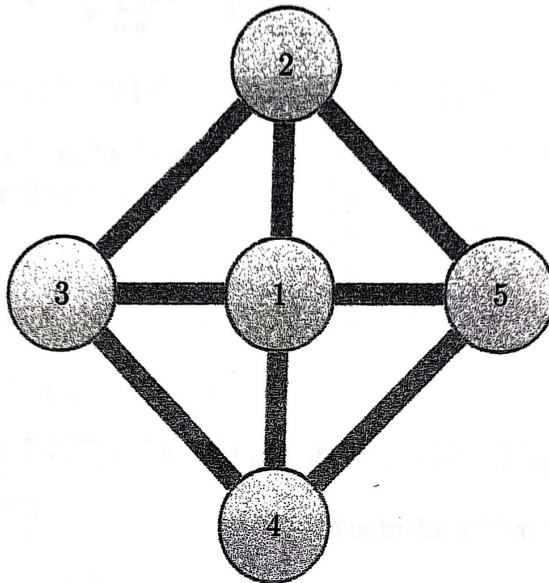


PC*	Devoir Surveillé N°4	durée 4h	Niveau Centrale/Mines
------------	-----------------------------	-----------------	------------------------------

Problème 1:

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i . On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k . À titre d'exemple, on aura donc

$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}).$$

Pour une matrice B , tB représente sa matrice transposée.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i), i = 1, \dots, 5)$.
2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.
3. En observant les colonnes de la matrice B , montrer que le réel 1 est valeur propre de B et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.
5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\mathbf{I}_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1}),$$

où \mathbf{I}_E représente l'endomorphisme identité de E .

6. Soit $x \in \ker(u - \mathbf{I}_E)$. Déterminer $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x)$.
7. Soit $x \in \text{Im}(u - \mathbf{I}_E)$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0_E$.
8. En déduire que $E = \ker(u - \mathbf{I}_E) \oplus \text{Im}(u - \mathbf{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E , que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à \mathbb{R}^n , telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}), \quad (2)$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera u l'endomorphisme canoniquement associé à A

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie, un entier $n \geq 2$.

Définition 1 On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Définition 2 Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, a_{i,j} \geq 0; \quad (3)$$

$$\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. \quad (4)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
12. En déduire que l'ensemble \mathcal{E} des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable par le produit matriciel.
13. Montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices stochastiques alors sa limite est stochastique.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.
17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
18. Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , stochastique, de rang 1.
19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
20. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne L sont tous strictement positifs.

22. On note toujours u l'endomorphisme canoniquement associé à A . On pose $F = \text{Ker}(u - I_E)$ et $G = \text{Im}(u - I_E)$ avec $E = \mathbb{R}^n$. On rappelle que $E = F \oplus G$

. On appelle u_F (resp u_G) l'endomorphisme induit par u sur F (resp sur G). Montrer que $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$

En déduire que le réel 1 est valeur propre simple de la matrice A

IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie en (2) ?

24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[1, 5]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants $k, k \in \mathbb{N}$).

Problème 2: Exponentielle de matrice

On admettra que $\forall z \in \mathbb{C} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Si $A \in M_p(\mathbb{C})$, on définit, lorsque cette limite existe, $E(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$.

I Cas des matrices diagonalisables

1) Soit $D \in M_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale. Montrer que $E(D)$ existe, l'expliciter et montrer que $E(D) \in GL_p(\mathbb{C})$

2) Montrer que si D et D' sont deux matrices diagonales de $M_p(\mathbb{C})$ alors $E(D+D') = E(D)E(D')$

3) Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable..

a) Montrer que $E(A)$ existe et l'exprimer en fonction de $E(D)$ avec D une matrice diagonale semblable à A

b) Montrer que $\det(E(A)) = e^{\text{tr}(A)}$

c) Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et montrer que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$

II Cas des matrices nilpotentes

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$)

1) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^j} \binom{n}{j}$

2) Montrer que $E(A)$ existe et que $E(A) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{A^j}{j!}$

3) Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et montrer que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$

III Cas général

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$. Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$, on note χ_A le polynôme caractéristique de A . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A d'ordres de multiplicité respectifs n_1, \dots, n_k . On note J_q la matrice de $M_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.

On pose M la matrice diagonale par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{C})$$

- 1) Montrer que J_q est nilpotente d'indice q
- 2) Montrer que $E(M)$ existe
- 3) On appelle R_n le reste de la division euclidienne de P_n par χ_A . Montrer que $E(A)$ existe si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(A)$ existe.
- 4) Montrer que $\chi_M = \chi_A$
- 5) Soit P un polynôme annulateur non nul de la matrice M
 - a) Soit α_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans P . Montrer que le polynôme $\prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ est annulateur de M et aussi annulateur des matrices $\lambda_i I_{n_i} + J_{n_i}$ pour $i \in [1, k]$.
 - b) Montrer que X^{α_i} est annulateur de J_{n_i} . Que peut-on dire de α_i par rapport à n_i ?
En déduire que $\deg P \geq p$
 - c) En déduire que la famille $(M^i)_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre. On la complète en une base de $M_p(\mathbb{C})$. Soit B la base ainsi constituée.
 - d) Montrer que $(R_n(M))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. En déduire que $(R_n(A))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (on exprimera $R_n(M)$ et $R_n(A)$ à l'aide des coefficients de R_n). En déduire l'existence de $E(A)$