PC* Devoir Surveillé N°4 durée 4h Niveau X-ENS

Problème 1:

Les deux parties sont indépendantes

Notations

- Si ℓ est un entier strictement positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^\ell$ de la norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\ell} |x_j|^2}$$

pour $x = (x_1, \dots, x_\ell)$.

- On note $\mathrm{M}_\ell(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de taille $\ell \times \ell$ à coefficients complexes.
- Si $A \in \mathrm{M}_\ell(\mathbb{C})$, on désigne par $\sigma(A)$ (le *spectre* de A) l'ensemble des valeurs propres complexes de A, et

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \; ; \; \lambda \in \sigma(A)\}$$

le *rayon spectral* de A.

- Étant donné un ensemble E, un *point fixe* d'une application $\phi : E \to E$ est un élément x de E tel que $\phi(x) = x$.

Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$. On dit que F est une partie fermée de E si et seulement si pour toute suite convergente de points de F, sa limite est dans F

On assimilera les éléments de $\mathbb{C}^\ell$ à leur matrice colonne dans la base canonique

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}} \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, on pose $N_\infty(A) = \underset{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}}{Max}(|a_{i,j}|)$

Première Partie. Points fixes

1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Si $\phi : [a, b] \to [a, b]$ est continue, montrer que ϕ possède au moins un point fixe.

2. Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

(1) $$\sup\{|\phi'(x)| \, ; \, x \in \mathbb{R}\} < 1,$$

montrer que ϕ possède au moins un point fixe (on pourra étudier le signe de $x - \phi(x)$ pour $|x|$ assez grand). Montrer que ce point fixe est unique.

3. Au moyen de la fonction $\psi(x) = \sqrt{1 + x^2}$, montrer que dans la question précédente l'hypothèse (1) ne peut pas être remplacée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; |\phi'(x)| < 1.$$

4. Soit ℓ un entier strictement positif. On se donne une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^\ell$ telle que la série $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$ converge. ($\sum_{n\in\mathbb{N}} \|v_{n+1} - v_n\|$ converge)

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

(b) Notons v^* la limite de cette suite. Majorer $\|v_n - v^*\|$ au moyen d'un reste de la somme de la série $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$.

5. Soit ℓ un entier strictement positif. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^\ell$ et soit $\phi : F \to F$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in F, \quad \|\phi(y) - \phi(x)\| \leqslant k\|y - x\|.$$

(a) On choisit un point $x_0 \in F$. Montrer que la formule $x_{n+1} = \phi(x_n)$ définit une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de F, et que cette suite est convergente dans F.

(b) En déduire que ϕ possède un unique point fixe dans F.

(c) Ce point fixe étant noté x^*, majorer $\|x_n - x^*\|$ en fonction de $\|x_0 - x^*\|$.

(d) Dans ce qui précède, on suppose que

$$\phi = \underbrace{\theta \circ \cdots \circ \theta}_{m \text{ fois}},$$

où $\theta : F \to F$ est une application et $m \geqslant 2$ est un entier. Montrer que θ possède un point fixe, et un seul, dans F.

6. Soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante (mais pas nécessairement continue). Montrer que g possède au moins un point fixe. *Indication: on pourra considérer l'ensemble*

$$E = \{x \in [0, 1]\,;\, x \leqslant g(x)\}.$$

Deuxième Partie. Matrices contractantes

1. Pour une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$, calculer explicitement les puissances successives T^n pour n entier strictement positif.

2. Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ une matrice et soit $\epsilon > 0$ un nombre réel.

(a) Montrer l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier positif n les modules des coefficients de A^n soient majorés par $\alpha(\rho(A) + \epsilon)^n$.

(b) En déduire l'existence d'un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout entier positif n et tout $x \in \mathbf{C}^2$ on ait

$$\|A^n x\| \leqslant \beta(\rho(A) + \epsilon)^n \|x\|.$$

Indication : Majorer $N_\infty(Ax)$ en fonction de $N_\infty(A)$ et de $N_\infty(x)$

3. Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ une matrice et soit η un nombre réel strictement positif.

(a) Pour $x \in \mathbf{C}^2$, montrer que la série

$$\sum_n (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\|$$

est convergente.

On note

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\|$$

la somme de cette série.

(b) Montrer que $x \mapsto N(x)$ est une norme sur $\mathbb{C}^2$, qui satisfait l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{C}^2, \quad N(Ax) \leqslant (\rho(A) + \eta)N(x).$$

(c) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ on ait

$$\|x\| \leqslant N(x) \leqslant C\,\|x\|.$$

4. (a) Si $B \in \mathbf{M}_\ell(\mathbb{C})$ est diagonalisable, montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|_B$ sur $\mathbb{C}^\ell$ telle que $\|Bx\|_B \leqslant \rho(B)\|x\|_B$ pour tout $x \in \mathbb{C}^\ell$. *Indication: on pourra vérifier que si $P \in \mathbf{GL}_\ell(\mathbb{C})$, alors $x \mapsto \|Px\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^\ell$.*

(b) Déterminer une matrice $C \in M_2(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^2$ tels que $\rho(C) = 1$ et tels que la suite $(C^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit bornée pour aucune norme sur $\mathbb{C}^2$

Montrer que, pour toute norme N sur $\mathbb{C}^2$ il existe $y \in \mathbb{C}^2$ tel que $N(Cy) > \rho(C)N(y)$.

5. a. Soient k et r des réels strictement positifs avec $r < 1$, soit (a_n) une suite réelle telle que $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_{n+1} \leq r\,a_n + k\,a_n^2$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $a_0 \in]0, \alpha[$, la suite (a_n) tend vers 0.

b. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application et soit x^* un point fixe de ϕ. Soit $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\rho(A) < 1$, et soit $M > 0$ un nombre réel. On suppose que ϕ satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|\phi(x) - \phi(x^*) - A(x - x^*)\| \leqslant M\|x - x^*\|^2.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $\|x_0 - x^*\| < \varepsilon$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ (pour $n \geqslant 0$) converge vers x^* quand $n \to +\infty$.

On pourra considérer un réel r tel que $\rho(A) < r < 1$

Problème 2:

Dans tout le problème, $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel *réel* de dimension finie $n \geqslant 2$. Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de $\mathscr{E}$, on note AB le composé $A \circ B$. Pour tout entier $i \geqslant 0$, A^i est l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par récurrence par $A^{i+1} = A^i A$ avec $A^0 = I$, automorphisme identique de $\mathscr{E}$; pour tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ d'une variable, à coefficients réels, $P(A)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i$.
L'image et le noyau de A sont respectivement notés $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$. Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ tel que $\mathscr{F}$ contienne l'image $A(\mathscr{F})$ qu'en donne A, on dit que $\mathscr{F}$ est *stable* par A. Enfin, s'il existe un entier $q > 0$ tel que $A^q = 0$, on dit que A est *nilpotent* et le plus petit de ces entiers q s'appelle *indice de nilpoence* de A.

I

Dans toute cette partie, L est un endomorphisme nilpotent de $\mathscr{E}$ et on note p son indice de nilpotence.

1. a. Soit i un entier positif ou nul. Montrer que l'égalité $\operatorname{Ker} L^i = \operatorname{Ker} L^{i+1}$ équivaut à l'égalité $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$ et qu'elle entraîne $\operatorname{Im} L^j = \operatorname{Im} L^i$ pour tout $j \geqslant i$.

   b. Montrer que si $\operatorname{Ker} L^i$ est différent de $\mathscr{E}$, alors il est aussi différent de $\operatorname{Ker} L^{i+1}$.

   c. Montrer que la dimension du noyau de L^i croît strictement avec l'exposant i sur l'ensemble des entiers de l'intervalle $[0, p]$. En déduire que $L^n = 0$, et que, si $p = n$, la dimension du noyau de L^i est égale à i pour tout entier i de l'intervalle $[0, n]$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier h de l'intervalle $[1, n-1]$ tel que L^h soit de rang $n - h$.

a. Établir que pour tout entier j de $[1, h]$, le rang de L^j est $n - j$.

b. Pour tout entier $i \geqslant 0$, établir une relation entre les dimensions des sous-espaces $\operatorname{Im} L^i$, $\operatorname{Im} L^{i+1}$ et $\operatorname{Im} L^i \cap \operatorname{Ker} L$.

c. Quel est l'indice de nilpotence de L ? (réponse : n)

3. Dans cette question, on suppose le rang de L égal à $n - 1$.

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par L et de dimension $r \geqslant 1$; on note M l'endomorphisme induit par L sur $\mathscr{F}$. Que peut-on dire de M^r ? En déduire que $\mathscr{F} = Ker(L^r)$.

Déterminer tous les sous espaces vectoriels de $\mathscr{E}$ stables par L

4. Dans cette question, on suppose que l'indice de nilpotence p de L est *strictement* compris entre 1 et n et on note e un élément de $\mathscr{E}$ tel que $L^{p-1}(e) \neq 0$.

a. Établir que la famille $(e, L(e), \cdots, L^{p-1}(e))$ est libre ; on note $\mathscr{G}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ qu'elle engendre.

b. Montrer qu'il existe φ une forme linéaire sur $\mathscr{E}$ telle que $\varphi\left(L^{p-1}(e)\right) \neq 0$.

On pose $\mathscr{H} = \left\{x \in \mathscr{E}, \forall i \in [\![0, p-1]\!] \ \varphi\left(L^i(x)\right) = 0\right\}$

c. Montrer que $\mathscr{H}$ est stable par L et que $\mathscr{E}$ est la somme directe de $\mathscr{G}$ et de $\mathscr{H}$.

d. Montrer que $\mathscr{E}$ est la somme directe de s sous-espaces vectoriels $\mathscr{E}_\ell$, $(\ell = 1, \ldots, s)$ dont chacun est stable par L et a pour dimension l'indice de nilpotence de la restriction de L à ce même sous-espace.

II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple (A, B) d'endomorphisme de $\mathscr{E}$, on note $[A, B]$ l'endomorphisme $AB - BA$.

Dans cette partie II, A et B sont des endomorphismes *non nuls* de $\mathscr{E}$ et α un réel *non nul* tels que

$$[A, B] = \alpha B.$$

1. **a.** Pour tout triplet (U, V, W) d'endomorphismes de $\mathscr{E}$, vérifier l'égalité

$$[U, VW] = [U, V]\, W + V\, [U, W].$$

b. Soient P un polynôme d'une variable à coefficients réels et P' son polynôme dérivé. Établir l'égalité

$$[A, P(B)] = \alpha B P'(B)$$

et en déduire que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\operatorname{Ker} B^k$ est stable par A.

c. montrer que B est nilpotent

On pourra introduire l'application ψ définie sur $L(\mathscr{E})$ par $\psi : f \mapsto [A, f]$

2. Dans cette question, on suppose que le rang de B est $n - 1$.

a. Quel est le rang de B^{n-1} ? Comment peut-on choisir x dans $\mathscr{E}$ de façon qu'en posant $x_k = B^{n-k}(x)$ pour tout entier k de $[1, n]$, la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ soit, pour tout k, une base de $\operatorname{Ker} B^k$?

b. Montre que x_1 est un vecteur propre de A, dont on notera λ la valeur propre associée. Quelle est la forme de la matrice de A relative à la base $(x_1, \ldots, x_n)$? En déduire en particulier que $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A.

c. Montrer que si x est un vecteur propre de A, associé à la valeur μ, $B(x)$ est un vecteur nul ou un vecteur propre de A, dont on précisera la valeur propre associée.

d. Soit e_n un vecteur de A associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$; pour tout entier k de $[1, n]$, on pose $e_k = B^{n-k}(e_n)$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathscr{E}$ dans laquelle A se diagonalise et rappeler les expression des matrices de A et B relatives à cette base.