

|            |                             |                 |                     |
|------------|-----------------------------|-----------------|---------------------|
| <b>PC*</b> | <b>Devoir Surveillé N°5</b> | <b>durée 4h</b> | <b>Niveau X-ENS</b> |
|------------|-----------------------------|-----------------|---------------------|

On définit, pour tout le problème, la fonction Gaussienne  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ .

On rappelle l'inégalité de Markov : Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et d'espérance finie on a :  $\forall \alpha > 0 \quad P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$

**I**

A) a. Pour  $t > 0$  on pose

$$A(t) = \left( \int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \quad B(t) = - \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx.$$

montrer que les fonctions  $A$  et  $B$  ont la même dérivée.

b. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx = 1.$$

2) Etant donnée une fonction  $g$  bornée continue sur  $\mathbb{R}$ , résoudre l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = g(x).$$

3) Etant donnée une fonction  $f$  bornée continue sur  $\mathbb{R}$ , et posant  $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x) dx$ , montrer que la fonction donnée par

$$\varphi(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} (f(y) - \langle f \rangle) dy$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et est solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = f(x) - \langle f \rangle.$$

Montrer aussi que

$$\varphi(x) = -e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-y^2/2} (f(y) - \langle f \rangle) dy.$$

4) Montrer que pour tous nombres réels  $x, y$ , on a

$$e^{-y^2/2} \leq e^{-x^2/2} e^{-x(y-x)}.$$

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C_0 \|f\|_\infty}{1+|x|},$$

avec  $C_0 \leq \max(4, 2\sqrt{2\pi e})$ . Pour ce faire, on distinguera les cas  $x \geq 1, x \leq -1, -1 \leq x \leq 1$ . En déduire que  $\varphi'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

5) On suppose dans tout le reste de cette partie en outre que  $f$  est de classe  $C^1$  avec  $f'$  bornée sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\varphi(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-s^2/2} e^{-sx} (f(x+s) - \langle f \rangle) ds.$$

En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$(1+|x|)|\varphi'(x)| \leq C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $f$ . En définissant  $C_1$  comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

6) Justifier que  $\varphi$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$|\varphi''(x)| \leq C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $f$ . En définissant  $C_2$  comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

### II

Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions réelles positives continues par morceaux.

1) En utilisant une intégration par parties que l'on justifiera, montrer que pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\varphi$  et  $\varphi'$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)(\varphi'(x) - x\varphi(x)) dx = 0.$$

2) On suppose pour cette question que la suite  $(g_n)$  est telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx = 1$  et que pour toute fonction  $h$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $h$  et  $h'$  soient bornées, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x)) dx = 0.$$

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour toute fonction  $f$  continue bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x) dx.$$

### III

Dans toute cette partie et la suivante, on suppose que  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, sur un espace de probabilité. On suppose que les  $X_i$  sont indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante  $M$ .

c'est-à-dire  $\forall i \in \mathbb{N} \quad |X_i| \leq M$  (ou encore  $X_i(\Omega) \subset [-M, M]$ )

On pose, pour tout  $n$ ,  $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$ . On notera  $P$  la probabilité et  $E$  l'espérance.

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f$  et  $f'$  soient bornées sur  $\mathbb{R}$ , et  $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x) dx$ . Soit  $\varphi$  définie à partir de  $f$  comme à la question I. 3).

1) Montrer qu'une variable aléatoire discrète bornée admet une espérance

2) Vérifier que

$$E(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)) = E(f(Z_n) - \langle f \rangle).$$

3) Pour  $i$  entier dans  $[1, n]$ , on définit  $Z_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_{i-1} + X_{i+1} + \dots + X_n) = Z_n - \frac{1}{\sqrt{n}}X_i$ . En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\left| X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i}) \right| \leq \frac{C_2}{2} \frac{|X_i|^3}{n} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

(on pourra appliquer la formule de Taylor reste intégral à  $\varphi$ )

4) En déduire que

$$\left| E(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\varphi'(Z_{n,i})) \right| \leq \frac{C_2 M}{2\sqrt{n}} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

5) En utilisant le même type d'arguments, montrer que

$$\left| E(\varphi'(Z_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(\varphi'(Z_{n,i})) \right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

(on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

6) En déduire que

$$\left| E(f(Z_n)) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x) dx \right| \leq \frac{C_2(1 + \frac{1}{2}M)}{\sqrt{n}} (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

7) Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $I_a$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $]-\infty, a]$  c'est à dire

$$I_a(x) = 1 \text{ si } x \in ]-\infty, a] \text{ et } I_a(x) = 0 \text{ sinon}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , déterminer une expression de la fonction  $f$  de classe  $C^1$  égale à 1 sur  $]-\infty, a-\varepsilon]$ , égale à 0 sur  $[a, +\infty[$  et polynômiale de degré 3 sur  $[a-\varepsilon, a]$ . Montrer que  $f$  et  $f'$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $\|f\|_\infty$  et  $\|f'\|_\infty$  (réponse:  $\|f\|_\infty = 1$  et  $\|f'\|_\infty = 3/2\varepsilon$ )

On admet qu'il existe de même une fonction  $g$  de classe  $C^1$  égale à 1 sur  $]-\infty, a]$ , égale à 0 sur  $[a+\varepsilon, +\infty[$  et polynômiale de degré 3 sur  $[a, a+\varepsilon]$ . (on ne demande pas son expression) et telle que  $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$  et  $\|g'\|_\infty = \|f'\|_\infty$ .

Justifier que  $f \leq I_a \leq g$  puis que  $E(f(Z_n)) \leq P(Z_n \leq a) \leq E(g(Z_n))$

Montrer alors que  $P(Z_n \leq a) = \int_{-\infty}^a G(x) dx + O(n^{-1/4})$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$

### IV

On garde les mêmes hypothèses qu'à la partie précédente, à savoir que  $(X_i)$  forme une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante  $M$ .

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n).$$

1) a) Montrer que  $\forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} \leq \lambda e^{x_1} + (1-\lambda)e^{x_2}$  (\*)

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$  fixé, et soit  $h: x \mapsto e^{tx}$ .

En appliquant l'inégalité (\*), obtenir une majoration de  $h$  sur  $[-M, M]$  par une fonction affine

$$\text{En déduire que } \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad E(e^{tX_i}) \leq \frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM})$$

b. Montrer que pour  $t \geq 0$  et  $M \geq 0$ , on a

$$\frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM}) \leq e^{\frac{1}{2}t^2 M^2}.$$

2) En déduire que pour tout  $\delta > 0$ ,

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \delta\right) \leq e^{-\frac{3\delta^2}{2M^2}}.$$

4)

a. On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}. \text{ Si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Montrer que si  $|x| \leq M$  on a  $f(x) \leq f(M)$ .

b. En utilisant les hypothèses sur  $X_i$  et l'inégalité  $1 + x \leq e^x$ , en déduire que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $i$ , on a

$$E(e^{tX_i}) \leq \exp\left(\frac{1}{M^2}(e^{tM} - 1 - tM)\right).$$

En déduire l'amélioration suivante du résultat précédent:

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \delta\right) \leq e^{-\frac{3}{M^2} \Phi(M\delta)}, \text{ où } \Phi(x) = (1+x) \log(1+x) - x.$$