PC* Devoir Surveillé N°6 durée 4h Niveau Centrale/Mines

Conditionnement d'une matrice et applications

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On note $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par $M^\top$ la transposée d'une matrice M.

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A – Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \longmapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés.

I – Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes et $C_1, C_2, \ldots C_n$ les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|L_i\|$, montrer que :

$$\|AX\| \leqslant M\sqrt{n}.$$

On pourra au préalable s'intéresser à la i^e ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Q2. En déduire que l'application N est bien définie, puis que : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

Q3. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q4. En est-il de même pour l'application $S : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto & \rho(M) \end{array} \right.$?

Q5. Soit $\Delta \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ dont on note $\delta_1, \ldots, \delta_n$ les termes diagonaux.

Vérifier que $N(\Delta) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\delta_i|$.

Q6. À l'aide de l'application $X \longmapsto \|AX\|$, démontrer que : $\quad N(A) = \max\limits_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Q7. Établir que : $\quad \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\| \leqslant N(A)\,\|X\|$.

Q8. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$N(AB) \leqslant N(A)\,N(B)\,.$$

Q9. Montrer que : $\quad \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|C_i\| \leqslant N(A)$.

Q10. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

En déduire $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II – Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie, A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q11. Déterminer $N(U)$.

Q12. Démontrer que $N(UA)$ et $N(A)$ sont égales.

Q13. En considérant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ où $\|X_0\| = 1$ tel que $\|AX_0\| = N(A)$, démontrer que $N(AU) = N(A)$.

Q14. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\quad N(A) = \rho(A)$.

Q15. Déterminer $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B – Conditionnement d'une matrice pour la norme N

On définit sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'application notée cond par : $\quad \text{cond} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & N(A)\,N\left(A^{-1}\right) \end{array} \right.$

I – Quelques résultats sur le conditionnement

Dans toute cette sous-partie, A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que : $\quad 1 \leqslant \mathrm{cond}(A)$.

Q17. Quel lien a-t-on entre $\mathrm{cond}(A)$ et $\mathrm{cond}(\alpha A)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$?

Q18. Démontrer que $\mathrm{cond}(U) = 1$.

Q19. Que dire de $\mathrm{cond}(UA)$, $\mathrm{cond}(AU)$ et de $\mathrm{cond}(A)$?

II – Un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice

On suppose dans cette partie uniquement que $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ où : $\quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 2 & \text{si} \quad j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q20. On considère le vecteur X de $\mathbb{R}^n$ donné par : $\quad X = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k$.

Montrer que $AX = E_n$.

Q21. Déduire de ce qui précède que $N\left(A^{-1}\right) \geqslant 2^{n-1}$.

Q22. Justifier $\|AE_2\| > 2$, pour en déduire que $\mathrm{cond}(A) > 2^n$.

Partie C – Conditionnement pour une matrice réelle inversible

Q23. Soit S une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On considère $\mathcal{C} = (V_1, \ldots, V_n)$ une base diagonalisante orthonormée de $\mathbb{R}^n$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, V_i est un vecteur propre associé à la valeur propre notée λ_i et où l'on suppose que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ sont les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité.
Montrer que : $\quad N(S) = \max\limits_{\|X\|=1} |\langle SX, X\rangle|$.

Q24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
Démontrer que la matrice $A^\top A$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour établir que $N(A^\top A) = N(A)^2$.

Q25. Déduire de ce qui précède que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle : $\quad N(A) = \sqrt{\rho(A^\top A)}$.

Q26. On suppose dans cette question que A est une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
En remarquant que $A^\top A = A^{-1}AA^\top A$, démontrer que les matrices $AA^\top$ et $A^\top A$ ont exactement les mêmes valeurs propres.

Q27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On note μ_m et μ_M respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice $A^T A$ et où l'on suppose que l'on a $0 < \mu_m \leqslant \mu_M$.
Montrer que : $\quad \mathrm{cond}(A) = \sqrt{\dfrac{\mu_M}{\mu_m}}$.

Q28. Exprimer $\mathrm{cond}(A)$ lorsque A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide des valeurs propres de A en remarquant que $A^\top A = A^2$.

Partie D – Calcul explicite de conditionnement

Dans toute cette partie, on désigne par T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de $\mathrm{cond}(T)$ en commençant par déterminer les éléments propres de la matrice T.

Q29. Montrer que les valeurs propres de T sont réelles.

Q30. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$. On considère le vecteur U_k de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$U_k = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \ldots, \sin\left(\frac{(n-1)k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right)\right).$$

Montrer que U_k est un vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.

Q31. En déduire l'ensemble des valeurs propres de T.

Q32. Déterminer alors la valeur de $\mathrm{cond}(T)$.

Partie E – Inégalité de Kantorovich

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ l'ensemble de ses valeurs propres où l'on suppose que $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ et comptées avec leur ordre de multiplicité, et on désigne par $\mathcal{C} = (V_1, \ldots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.
On se propose d'établir le résultat suivant, appelée inégalité de Kantorovich :

$$(K): \quad \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|^4 \leqslant \langle AX, X\rangle \langle A^{-1}X, X\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cond}(A)}} + \sqrt{\mathrm{cond}(A)}\right)^2 \|X\|^4.$$

I – Une première démonstration

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ donné par $P = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)X + \lambda_1\lambda_n$.

Q33. Exprimer $\mathrm{cond}(A)$ à l'aide des valeurs propres de A.

Q34. On admet que l'application $(\cdot,\cdot)_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & \langle AX,Y \rangle \end{array} \right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|^4 \leqslant \langle AX,X \rangle \langle A^{-1}X,X \rangle$.

Q35. Montrer que : $\forall k \in \{1,\ldots,n\}, P(\lambda_k) \leqslant 0$.

Q36. Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = A^{-1}P(A)$ et en déduire que $\langle BX,X \rangle \leqslant 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

Q37. Pour $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, on désigne par f la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \langle AX,X \rangle \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 \lambda + \lambda_1\lambda_n \langle A^{-1}X,X \rangle \end{array} \right.$$

Vérifier que $f(1) = \langle BX,X \rangle$, montrer que $f(0)f(1) \leqslant 0$, puis établir que :

$$(\star) : \quad (\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|X\|^4 - 4 \langle AX,X \rangle \langle A^{-1}X,X \rangle \lambda_1\lambda_n \geqslant 0.$$

Q38. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Kantorovich.

II – Une deuxième démonstration

On admet que, pour établir la relation (K), il suffit de la vérifier pour un vecteur X de norme 1.

Dans toute cette partie, $X = (x_1,\ldots,x_n)$ désigne donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{C}$.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, et on définit la variable aléatoire Z par :

$$Z(\Omega) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\} \text{ et : } \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \mathbb{P}([Z = \lambda_i]) = x_i^2$$

Q39. Justifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour Z.

Q40. Justifier que Z et $\dfrac{1}{Z}$ admettent une espérance, puis les exprimer en fonction de $\langle AX,X \rangle$ et de $\langle A^{-1}X,X \rangle$.

Q41. En remarquant que la variable aléatoire $(Z - \lambda_1)(Z - \lambda_n)$ est négative, établir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{Z} \leqslant \frac{\lambda_1 + \lambda_n - Z}{\lambda_1\lambda_n}.$$

Q42. En déduire alors que : $\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{Z}\right) \leqslant -\dfrac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left(\mathbb{E}(Z) - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}\right)^2 + \dfrac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$.

Q43. Déduire de ce qui précède la seconde partie de l'inégalité de Kantorovich.

◇ Fin ◇
