1

**PC* Devoir Surveillé N°6 durée 4h Niveau X-ENS**
**Sujet de remplacement**

***Problème 1***

**On admet les résultats suivants :**

On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. On admet que $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma(n)=(n-1)!$ . On admet que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

## Matrices infiniment divisibles

**Notations :**

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit $n$ un entier $\geqslant 1$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant. On désigne par $\mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques. On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice identité. On identifie $\mathbf{R}^n$ et l'espace des matrices à $n$ lignes et 1 colonne.

On note ${}^tA$ la transposée de $A$

### Deuxième partie : matrices positives et produit de Hadamard

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que $A$ est positive si $A$ est symétrique et

$$\forall X = {}^t(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \langle X, AX\rangle = {}^tXAX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \geqslant 0$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbf{R}^n$.

**3.** Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix} \in \mathcal{SM}_2(\mathbf{R})$. Montrer que $A$ est positive si et seulement si $a\geqslant 0, d\geqslant 0$, $\det(A)\geqslant 0$.

**4.** Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $A$ est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

**5.** Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ une matrice positive, et $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ des réels. Montrer que, posant $b_{ij}=\lambda_i\lambda_j a_{ij}$, la matrice $B=(b_{ij})$ est positive.

**6.** Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel préhilbertien réel, pour lequel le produit scalaire de deux éléments $x,y\in\mathcal{H}$ est noté $\langle x,y\rangle$. Soient $u_1,\cdots,u_n \in \mathcal{H}$. On pose $a_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle$. Montrer que la matrice $A=(a_{ij})$ est positive.

Soient $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Leur produit de Hadamard est la matrice $C=(c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donné par : $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$. On désignera cette opération par le signe $*$ : $C=A*B$.

**7.** Montrer que si $A\in\mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive et si $B$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls, alors $A*B$ est une matrice positive.

**8a.** Montrer que si $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive, elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme $Y\,{}^tY = {}^t(y_1, \cdots, y_n)(y_1, \cdots, y_n)$, où $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. On pourra commencer par le cas où $A$ est diagonale.

**8b.** Montrer que si $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ sont des matrices positives, alors $A * B$ est une matrice positive.

## Troisième partie : matrices infiniment divisibles

On considère maintenant des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. Il résulte de la question **8b.** que si $A$ est positive, alors pour tout entier $r > 0$, la matrice $A^{*r} = (a_{ij}^r)$ est positive. On dit qu'une matrice symétrique $A$ à coefficients $a_{ij}$ positifs ou nuls est infiniment divisible si pour tout **réel** $r > 0$, la matrice $(a_{ij}^r)$ est positive. On désignera encore, lorsque $r$ est un réel strictement positif, par $A^{*r}$ la matrice $(a_{ij}^r)$.

**9a.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive à coefficients positifs ou nuls. Montrer qu'elle est infiniment divisible.

**9b.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est positive. Déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles $A^{*r}$ est positive.

**10.** Montrer que si $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs, alors posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est infiniment divisible.

**11.** Soit $A$ une matrice symétrique à coefficients positifs ou nuls. Montrer que si pour tout entier $m \geqslant 1, A^{*\frac{1}{m}}$ est positive, alors $A$ est infiniment divisible.

**12.** Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. On forme la matrice $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ et on se propose de montrer qu'elle est infiniment divisible.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, dont le carré est intégrable. On munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire : pour $f, g \in \mathcal{H}, \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose, pour tout $t \geqslant 0, u_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

**12a.** Calculer $\langle u_i, u_j \rangle$ et en déduire que $C$ est positive.

**12b.** Montrer que pour $r > 0$ et $\alpha > 0, \dfrac{1}{\alpha^r} = \dfrac{1}{\Gamma(r)} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} t^{r-1} \mathrm{d}t$.

**12c.** Soit, pour $r > 0, \mathcal{H}_r$ l'ensemble des fonctions continues $u$ sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles telles que la fonction $t \mapsto u(t)^2 t^{r-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. On admet que c'est un espace vectoriel. Montrer que si on pose, pour $u, v \in \mathcal{H}_r, \langle u, v \rangle = \int_0^{+\infty} u(t)v(t)t^{r-1}\mathrm{d}t$, on munit $\mathcal{H}_r$ d'un produit scalaire.

**12d.** Montrer que $C$ est infiniment divisible.

**13.** Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ on pose $k_{ij} = \dfrac{\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{\Gamma(\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_j + 1)}$. On se propose de montrer que la matrice $K = (k_{ij})$ est infiniment divisible.

**13a.** Montrer que $k_{ij} = \lim_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m.m!} \prod_{p=1}^{m+1} \dfrac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{(\lambda_i+\lambda_j+p)}$.

**13b.** Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la matrice $\left(\dfrac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{(\lambda_i+\lambda_j+p)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est infiniment divisible. Conclure.

## Quatrième partie : matrices conditionnellement positives

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est conditionnellement positive si elle est symétrique et si pour tout $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on a

$$ {}^tXAX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \geqslant 0 . $$

**14.** Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels strictements positifs. Posons $a_{ij} = -\ln(\lambda_i+\lambda_j)$. Montrer que $A = (a_{ij})$ est conditionnellement positive. (Pour $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on pourra introduire la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$ f(r) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j \left(\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)^r $$

et utiliser les résultats de la question **12.**).

**15.** Notons $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $B \in \mathcal{SM}_n(\mathbf{R})$. Considérons les deux conditions suivantes :
(i) $B$ est conditionnellement positive.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que la matrice $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ est positive.
Montrer que (ii) implique (i).

On admettra dans la suite que ces deux conditions sont en fait équivalentes.

**16a.** On suppose que $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et que tous les coefficients de $A$ sont strictement positifs. Montrer que la matrice $(\ln a_{ij})$ est conditionnellement positive.

**16b.** Réciproquement, supposons que la matrice $B = (b_{ij})$ est conditionnellement positive. En considérant pour tout $\varepsilon > 0$ une matrice $C = (c_{ij}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$ comme au **15.**, montrer que pour tout $r > 0$, la matrice $(\exp(rc_{ij}))$ est positive. En déduire que la matrice $(\exp(rb_{ij}))$ est positive.

**17a.** Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que la matrice $(e^{-|z_i-z_j|^2})$ est infiniment divisible.

**17b.** Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que pour tout $t > 0$, la matrice de coefficients $\dfrac{1}{t+|z_i-z_j|^2}$ est positive, puis que la matrice de coefficients $-\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \frac{|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}dt$ est conditionnellement positive.

**17c.** Montrer que la matrice $(e^{-|z_i-z_j|})$ est infiniment divisible.

**Problème 2** on désigne par

- $n$ et $m$ des entiers $> 0$ tels que $n \leqslant m$ ;
- $E$ l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ avec son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$ ;
- $e_j$, $j = 1, \dots, m$, des éléments non nuls de $E$ satisfaisant une condition de la forme

$$\forall x \in E \quad \alpha\|x\|^2 \leqslant \sum_j (x \mid e_j)^2 \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel} > 0 \tag{1}$$

- $T$ l'endomorphisme de $E$ défini par $T(x) = \sum_j (x \mid e_j)\, e_j$.

Si $S$ est un endomorphisme de $E$, sa norme $\|S\|$ est défini par $\|S\| = \sup\{\|S(x)\|,\ \|x\| = 1\}$.

## Première partie

**1.** Donner un exemple simple de famille $(e_j)$ satisfaisant une condition de la forme (1).

**2.** Déterminer le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les $e_j$.

**4.** Vérifier que $T$ est autoadjoint, inversible et satisfait $\big(T(x) \mid x\big) \geqslant \alpha\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

**5.** Comparer $\|T\|$ et $\sup\{\big(T(x) \mid x\big),\ \|x\| = 1\}$.

**6.** Trouver un réel $\beta$ tel que $\big(T^{-1}(x) \mid x\big) \leqslant \beta\|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Que peut-on dire de $\|T^{-1}\|$ ?

**7.** On suppose que $\alpha\|x\|^2 = \sum_j (x \mid e_j)^2$ pour tout $x \in E$. Déterminer $T$.

## Deuxième partie

On note $F$ l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, $(f_1, \dots, f_m)$ sa base usuelle, $(\cdot|\cdot)_F$ son produit scalaire usuel. On définit une application linéaire $\Phi : E \to F$ par

$$\Phi(x) = \sum_j (x \mid e_j)\, f_j .$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : F \to E$ satisfaisant

$$(\Psi(h) \mid x) = (h \mid \Phi(x))_F \quad \text{pour tous } x \in E,\ h \in F .$$

**8.** Vérifier que l'on a $\Psi(h) = \sum_j h_j e_j$ et $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose $\widetilde{e_j} = T^{-1}(e_j)$ et on définit une application linéaire $\widetilde{\Phi} : E \to F$ par

$$\widetilde{\Phi}(x) = \sum_j (x \mid \widetilde{e_j})\, f_j .$$

**9.** Vérifier que l'on a $F = \operatorname{Im}\widetilde{\Phi} \oplus (\operatorname{Im}\Phi)^{\perp}$.

**10.**
a) Montrer que $Ker(\psi) = (\operatorname{Im}\Phi)^{\perp}$. Soit $x \in E$ fixé et $h \in F$ tel que $\psi(h) = x$. Montrer que $h - \widetilde{\Phi}(x) \in Ker(\psi)$

b) Soit $x \in E$ fixé. Montrer que $Inf\left\{\|h\|_F^2 ,\psi(h) = x\right\} = \left(x \backslash T^{-1}(x)\right)$ et montrer que cette borne inférieure est atteinte par une unique valeur de $h$ que l'on déterminera.

c) Que se passe t'il si la famille $(e_j)_{1\leq j\leq m}$ est une base orthonormée de $E$ ?