

Programme de colle N°1 : semaine du 21 septembre au 26 septembre

*Séries numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- Convergence d'une série , si la série converge , le terme général tend vers 0 , le reste tend vers 0 .La convergence d'une série à valeurs complexe équivaut à la convergence des séries des parties réelles et imaginaires .Convergence d'une série géométrique . La convergence d'une suite (u_n) équivaut à la convergence de la série $\sum u_{n+1} - u_n$
- Théorème de comparaison des séries à termes positifs : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (ou si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$) et si $\sum v_n$ converge , alors $\sum u_n$ converge . Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature . Convergence des séries de Riemann .
- Règle de d'Alembert .
- Séries absolument convergentes . Une série complexe est absolument convergente ssi les séries de ses parties réelles et imaginaires sont absolument convergentes .Une série absolument convergente est convergente .
- Produit de Cauchy de deux séries . Si les deux séries convergent absolument , leur produit de Cauchy aussi .
- Séries alternées : Théorème spécial des séries alternées , signe du reste et majoration du reste
- Formule de Stirling (admise pour l'instant)
- Encadrement d'une série par des intégrales
- Séries de Bertrand (on peut interroger les élèves sur des exemples)
- Transformation d'Abel (hors programme mais traité tout de même)

*Intégrale d'une fonction continue sur un segment (révisions et Taylor reste intégral)

- Sommes de Riemann
- Th fondamental de l'analyse : si f est continue sur I et $a \in I$ alors $F: x \mapsto \int_a^x f$ est de classe C^1 et $F' = f$
- Révision sur le calcul intégral : intégration par parties , changement de variables
- Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange

*Questions de cours

- 1) Pour des séries à termes positifs , si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (ou si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$) et si $\sum v_n$ converge , alors $\sum u_n$ converge
- 2) Convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- 3) Convergence de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ (vers la constante d'Euler)
- 4) Théorème spécial des séries alternées (démonstration de la convergence de la série uniquement)
- 5) Soit $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arc sin } \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arc cos } \sqrt{t} dt$. Etudier f .
- 6) Formule de Taylor avec reste intégral (énoncé et démonstration)

A suivre : intégrales généralisées